המכללה האקדמית נתניה

מבחן באינפי ב' מועד ב' כתת הנדסאים שנת התשע"ב

שם המרצה: ד"ר גיורא דולה
תאריך הבחינה : **יום ד,ז כסלו התשע"ג** 21-11-2012
משך הבחינה: שלוש שעות
חומר עזר: מחשבון (לא גרפי).

<u>ענה על כל השאלות הבאות:</u>

1. א. נסח **<u>והוכח</u>** את מבחן המנה (דלאמבר'ט) להתכנסות טורים חיוביים. (10%)

מותר להסתמך על כל טענה או משפט אחרים שלמדנו בכתה מבלי להוכיח אותם, אבל יש לנסח אותם במדויק לפני או אחרי ההוכחה.

ב. בדוק התכנסות הטור הבא: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\cdot 3^n}{n^n}$ (8%)

2. מצא את הגבול הבא: (10%)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\frac{n}{n^2+3^2}\,..........\,+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$$

3. מצא את השטח החסום על ידי הגרפים של הפונקציות:
$f(x) = x\sqrt{x} - x$ ו $g(x) = 4x - 4\sqrt{x}$ (10%)

4. חשב את אורך העקומה $y = \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{2x^2}$ בתחום $2 \le x \le 3$ (10%)

5. בדוק התכנסות האינטגרל הבא: $\int_1^{\infty} \frac{(x^4+1)\cdot\cos(2008x)}{e^{4x}}\,dx$ נמק. (10%)

6. בדוק התכנסות הטורים הבאים. נמק . (32%)

א:
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((n+1)!)^2}{(2n)!}$$

ב:
$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 9\cdots n^2}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdots (4n-3)}$$

ג:
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[6]{n^{12}-7n^4+9}+n}{3n^4+5n+2008}$$

ד:
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos(n^n)}{n^3}$$

7. הוכח כי אם נתונות שתי חלוקות סופיות T,R של אותו קטע, ונתון כי $R\subset T$ אז מתקיים עבור סכומי דרבוהעליונים כי $SU(T)\le SU(R)$ ועבור סכומי דרבו התחתונים כי $SL(R)\le SL(T)$ (10%)

מותר להסתמך על כל טענה או משפט אחרים שלמדנו בכתה מבלי להוכיח אותם, אבל יש לנסח אותם במדויק לפני או אחרי ההוכחה.

בהצלחה!!!

דף נוסחאות

1. נוסחאות הכפל ופירוק לגורמים:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),\quad (a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$$
$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3,$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2), a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

2. משוואה ריבועית

א. פתרון המשוואה $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ הוא $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

ב. פירוק הטרינום $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

3. חזקות ושורשים

$$a^xa^y=a^{x+y},(ab)^x=a^xb^x,\sqrt[x]{a}=a^{\frac{1}{x}},\sqrt[x]{a^y}=a^{\frac{y}{x}},$$
$$\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y},\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x},\left(\frac{a}{b}\right)^{-x}=\frac{b^x}{a^x},a^0=1,$$
$$\left(a^x\right)^y=a^{xy},a^{-x}=\frac{1}{a^x},\sqrt[x]{a}\cdot\sqrt[x]{b}=\sqrt[x]{ab}$$

4. לוגריתמים.

הגדרת ה-log: $\log_a x=y\Leftrightarrow a^y=x$

תחום ההגדרה: $\log_a x$ מוגדר רק כאשר $x>0$ ו $0<a,a\neq 1$.

$$\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y,\qquad \log_a x^y=y\cdot\log_a x;$$
$$\log_a(x/y)=\log_a x-\log_a y,\qquad \log_a\sqrt[y]{x}=\tfrac{1}{y}\cdot\log_a x;$$
$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a},\qquad \log_a x=\frac{1}{\log_x a};$$
$$a^{\log_a x}=x,\qquad \ln x=\log_e x,e=2.718281828\ldots$$
$$\ln x=a\Rightarrow x=e^a$$

5.הגדרת נגזרת הפונקציה f בנקודה x_0: $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

6. נגזרות בסיסיות.

$$\left(x^a\right)'=ax^{a-1},\qquad (a^x)'=\ln a\cdot a^x;$$
$$(\sin x)'=\cos x,\qquad (e^x)'=e^x;$$
$$(\cos x)'=-\sin x,\qquad (\log_a x)'=\frac{1}{x\cdot\ln a};$$
$$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x},\qquad (\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x};$$
$$(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

7. כללי גזירה

$$(a\cdot f(x))' = a\cdot f'(x);$$
$$(f(x)\pm g(x))' = f'(x)\pm g'(x);$$
$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x);$$
$$.(f(x)g(x)h(x))' = f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$$
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)};$$
$$(f(g(x))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

8. אינטגרלים מיידים

$$\int 0dx = C;$$
$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x|+C;$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C;$$
$$\int \sin x dx = -\cos x + C;$$
$$\int e^x dx = e^x + C;$$
$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C;$$
$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1}+C, a\neq -1;$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C;$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C;$$
$$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \arctan x + C$$

9. כללי אינטגרציה.

$$\int (f(x)\pm d(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$$
$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx;$$
$$\int f(x)dx = F(x)+C \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a}+C;$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

אינטגרציה בחלקים בנסוח אחר:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

החלפת משתנה אינטגרציה:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, t = g(x)$$

10. שמושי אינטגרלים

א.שטח : $S = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$

ב. שטח בקואורדינטות קטביות: $S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$

ג. נפח גוף סבוב סביב ציר x: $V = \pi\int_a^b (g^2(x) - f^2(x))dx$

ד. נפח גוף סבוב סביב ציר y: $V = 2\pi\int_a^b xf(x)dx$

ה. אורך קו: $l = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$

.11

א.הזהויות היסודיות הטריגונומטריות

π רדיאן שווים ל-180 מעלות.

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

$$\tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \tan x \cdot \cot x = 1;$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x};$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

ב. סכום והפרש זוויות

:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

ג. זוויות כפולות וחצויות:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha).$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha).$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}.$$

$$\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2(\alpha)-1}{2\cot(\alpha)}.$$

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}.$$

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}.$$

$$\sin(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}.$$

$$\cos(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}.$$

$$\tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$

:

$$\tan^2(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$

ד. סכומים והפרשים:

$$\sin(\alpha)+\sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$

$$\sin(\alpha)-\sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}).$$

:

$$\cos(\alpha)+\cos(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$

$$\cos(\alpha)-\cos(\beta) = -2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

ה. מכפלות:

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$

$$\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$

:

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

פתרונות

1-ב

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\cdot 3^n}{n^n},\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)!3^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{n!\cdot 3^n}=\frac{3(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}}=3\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{3}{(1+1/n)^n},$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3}{e}>1.$$

ולכן הטור מתבדר לפי מבחן ד'אלמברט.

2-

$$\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\frac{n}{n^2+3^2}..........+\frac{n}{n^2+n^2}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1^2}{n^2}}+\frac{1}{1+\frac{2^2}{n^2}}+\frac{1}{1+\frac{3^2}{n^3}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n^2}{n^2}}\right)=\frac{1}{n}\frac{1}{1+\sum_{k=1}^{n}(\frac{k}{n})^2}.$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\frac{n}{n^2+3^2}..........+\frac{n}{n^2+n^2}\right)=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan(x)_0^1=\pi/4-0=\pi/4.$$

.3

$$f(x)=x\sqrt{x}-x=g(x)=4x-4\sqrt{x}\rightarrow x\sqrt{x}-5x+4\sqrt{x}=0\rightarrow\sqrt{x}(x-5\sqrt{x}+4)=0\rightarrow\sqrt{x}(x-4)(\sqrt{x}-1)=0$$
$$\rightarrow\sqrt{x}=0,1,4\rightarrow x=0,1,16,\ f(4)=8-4=4<g(4)=16-8=8,\ g(0.25)=1-2=-1<f(0.25)=$$
$$=0.125-0.25=-0.125,S=\int_0^1(x\sqrt{x}-5x+4\sqrt{x})dx+\int_1^{16}(5x-x\sqrt{x}-4\sqrt{x})dx,$$
$$H=\frac{5x^2}{2}-\frac{2x^{2.5}}{5}-\frac{8x^{1.5}}{3},S=H(16)+H(0)-2H(1)=(640-\frac{2048}{5}-\frac{512}{3})+0-(\frac{5}{2}-\frac{2}{5}-\frac{8}{3})=$$
$$=640-\frac{504}{3}-\frac{2046}{5}-2.5=640-168-409.2-2.5=60.3$$

תשובה 4

$$y=\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{2x^2}, y'=y=\frac{x^3}{4}-x^{-3}, (y')^2=\frac{x^6}{16}+x^{-6}-\frac{1}{2}, (y')^2+1=\frac{x^6}{16}+x^{-6}+\frac{1}{2}=$$

$$=(\frac{x^3}{4}+x^{-3})^2, l=\int_2^3(\frac{x^3}{4}+x^{-3})dx=(\frac{x^4}{16}-\frac{x^{-2}}{2})\Big|_2^3=\frac{81-16}{3}-\frac{1/9-1/4}{2}=\frac{65}{3}+\frac{5}{72}=21+\frac{2}{3}+\frac{5}{72}=21+\frac{53}{72}$$

.5

$$\int_1^\infty\frac{(x^4+1)\cdot\cos(2008x)}{e^{4x}}dx, f=\frac{x^4+1}{e^{4x}}, g=\cos(2008x), \int_0^x\cos(2008t)dt=\frac{\sin(2008t)}{2008}\Big|_0^x=\frac{\sin(2008x)}{2008}-\frac{\sin(0)}{2008},$$

$$|\int_0^x\cos(2008t)dt|\le\frac{1}{2008}, f'=\frac{4x^3e^{4x}-4e^{4x}(x^4+1)}{e^{8x}}=\frac{4(x^3-x^4-1)}{e^{4x}}, (1<x)\to(f'<0),$$

$$\lim_{x\to\infty}f=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+1}{e^{4x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3}{4e^{4x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{4e^{4x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{16e^{4x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{64e^{4x}}=0.$$

תשובה 6

א :

$$\sum_{n=1}^\infty\frac{((n+1)!)^2}{(2n)!}, \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{((n+2)!)^2}{(2n+2)!}\frac{(2n)!}{((n+1)!)^2}=\frac{(n+2)^2}{(2n+2)(2n+1)}.\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+2}\frac{n+1}{2n+1}=0.25<1$$

הטור מתכנס לפי מבחן המנה.

ב :

$$\sum_{n=3}^\infty\frac{1\cdot4\cdot9\cdots n^2}{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdots(4n-3)}, \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1\cdot4\cdot9\cdots(n+1)^2}{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdots(4n+1)}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdots(4n-3)}{1\cdot4\cdot9\cdots n^2}=\frac{(n+1)^2}{4n+1}, \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\infty$$

הטור מתבדר לפי מבחן המנה.

ג :

$$\sum_{n=1}^\infty\frac{\sqrt[6]{n^{12}-7n^4+9}+n}{3n^4+5n+2008}, a_n=\frac{\sqrt[6]{n^{12}-7n^4+9}+n}{3n^4+5n+2008}, b_n=\frac{1}{n^2}, \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\sqrt[6]{n^{12}-7n^4+9}+n^3}{3n^4+5n+2008}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[6]{1-7n^{-8}+9n^{-12}}+n^{-1}}{3+5n^{-3}+2008n^{-4}}=\frac{1}{3}$$

לפי מבחן השואת הגבול הטור מתנהג כמו הטור החדש אשר מתכנס.

ד :

$$\sum_{n=1}^\infty(-1)^n\frac{\cos(n^n)}{n^3}, |a_n|=\frac{|\cos(n^n)|}{n^3}\le\frac{1}{n^3}$$

טור הערכים המוחלטים קטן מטור מתכנס, לכן הטור המקורי מתכנס בהחלט.