המכללה האקדמית נתניה ע"ר
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

NETANYA ACADEMIC COLLEGE (R"S)
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

<u>מבחן סוף בקורס אינפיב-כתת הנדסאים סמסטר קיץ, מועד א.</u>

יום א, כה תשרי התשע"ה 19-10-2014

- מורה : גיורא דולה.
- משך המבחן שלוש שעות.
- מותר להשתמש במחשבונים לא מדעיים ובדפי הנוסחאות המצורפים.
- התשובות תכתבנה במחברת.
- יש לנמק את כל החשובים.
- המבחן כולל 9 שאלות.
- שאלות 1 סעיף א, ו8 הן שאלות הוכחה בנות משקל של 10 נקודות כ"א. כל סעיף אחר משקלו 8 נקודות.

בהצלחה.

<u>ענה על כל השאלות הבאות :</u>

עמותה רשומה 580242451 **Fax:** (972-9) 8844439 **:פקס** **Tel:** (972-9) 8607777 **:טל**

1. א. נסח **<u>והוכח</u>** את המבחן האינטגרלי להתכנסות טורים חיוביים. (10%)

ב. בדוק התכנסות הטור הבא: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{\sqrt{n}\cdot e^{\sqrt{n}}}$ (8%)

2. חשב את האינטגרל הבא: (8%)

$$\int\frac{3x^2-16x+15}{x(x^2-4x+3)}dx$$

3. מצא את השטח החסום על ידי הגרפים של הפונקציות:

$f(x)=x^3-x^2+2x-5$ ו $g(x)=3x^3-6x^2+4x-5$ (8%)

4. חשב את אורך הקשת של העקומה $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ (8%)

בתחום: $\frac{1}{8}\le x\le 1$.

5. בדוק התכנסות האינטגרל הבא: $\int_1^{\infty}\frac{\cos(-2x)}{x\sqrt{x}}dx$ נמק. (8%)

6. מצא את הגבול הבא: (8%)

$$\lim_{n\to\infty}2n\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{1}{n^2+2^2}+\frac{1}{n^2+3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2}\right)$$

7. בדוק התכנסות ארבעה מתוך חמשת הטורים הבאים. נמק . (32%)

א: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{n^n}$

ב: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+\ln n}{n\cdot\ln n}$

ג: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{0.5^n}{(1-\frac{5}{3n+9})^{n^2}}$

ד: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{\cos(n!)+8}{n^2\cdot\ln n}$

ה. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}$

8. הוכח כי אם לפונקציה f קים אינטגרל בקטע [a,b] אז f חסומה בקטע (10%).

בהצלחה!!!

דף נוסחאות

1. נוסחאות הכפל ופירוק לגורמים:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),\quad (a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$$
$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3,$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2),\ a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

2. משוואה ריבועית

א. פתרון המשוואה $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$) הוא $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

ב. פירוק הטרינום $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

3. חזקות ושורשים

$$a^xa^y=a^{x+y},\ (ab)^x=a^xb^x,\ \sqrt[x]{a}=a^{\frac{1}{x}},\ \sqrt[x]{a^y}=a^{\frac{y}{x}},$$
$$\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y},\ \left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x},\ \left(\frac{a}{b}\right)^{-x}=\frac{b^x}{a^x},\ a^0=1,$$
$$\left(a^x\right)^y=a^{xy},\ a^{-x}=\frac{1}{a^x},\ \sqrt[x]{a}\cdot\sqrt[x]{b}=\sqrt[x]{ab}$$

4. לוגריתמים.

הגדרת ה-log: $\log_a x=y\Leftrightarrow a^y=x$

תחום ההגדרה: $\log_a x$ מוגדר רק כאשר $x>0$ ו $0<a, a\neq 1$.

$$\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y,\qquad \log_a x^y=y\cdot\log_a x;$$
$$\log_a(x/y)=\log_a x-\log_a y,\qquad \log_a\sqrt[y]{x}=\tfrac{1}{y}\cdot\log_a x;$$
$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a},\qquad \log_a x=\frac{1}{\log_x a};$$
$$a^{\log_a x}=x,\qquad \ln x=\log_e x, e=2.718281828...$$
$$\ln x=a\Rightarrow x=e^a$$

5.הגדרת נגזרת הפונקציה f בנקודה x_0: $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

6. נגזרות בסיסיות.

$$\left(x^a\right)'=ax^{a-1},\qquad (a^x)'=\ln a\cdot a^x;$$
$$(\sin x)'=\cos x,\qquad (e^x)'=e^x;$$
$$(\cos x)'=-\sin x,\qquad (\log_a x)'=\frac{1}{x\cdot\ln a};$$
$$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x},\qquad (\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x};$$
$$(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

7. כללי גזירה

$$(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x);$$
$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x);$$
$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$$
$$(f(x)g(x)h(x))' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x).$$
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)};$$
$$(f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

8. אינטגרלים מיידים

$$\int 0dx = C;$$
$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C;$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C;$$
$$\int \sin x dx = -\cos x + C;$$
$$\int e^x dx = e^x + C;$$
$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C;$$
$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C, a \neq -1;$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C;$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a} + C;$$
$$\int \frac{1}{a^2 + x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

9. כללי אינטגרציה.

$$\int (f(x) \pm d(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$$
$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx;$$
$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C;$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

אינטגרציה בחלקים בנסוח אחר:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

החלפת משתנה אינטגרציה:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, t = g(x)$$

10. שמושי אינטגרלים

א.שטח : $S = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$

ב. שטח בקואורדינטות קטביות: $S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$

ג. נפח גוף סבוב סביב ציר x: $V = \pi\int_a^b (g^2(x) - f^2(x))dx$

ד. נפח גוף סבוב סביב ציר y: $V = 2\pi\int_a^b xf(x)dx$

ה. אורך קו: $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$

.11

א.הזהויות היסודיות הטריגונומטריות

π רדיאן שווים ל-180 מעלות.

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

$$\tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \tan x \cdot \cot x = 1;$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x};$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

ב. סכום והפרש זוויות

:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

ג. זוויות כפולות וחצויות:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha).$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha).$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}.$$

$$\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2(\alpha)-1}{2\cot(\alpha)}.$$

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}.$$

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}.$$

$$\sin(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}.$$

$$\cos(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}.$$

$$\tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$

:

$$\tan^2(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$

ד. סכומים והפרשים:

$$\sin(\alpha)+\sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$

$$\sin(\alpha)-\sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}).$$

:

$$\cos(\alpha)+\cos(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$

$$\cos(\alpha)-\cos(\beta) = -2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

ה. מכפלות:

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$

$$\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$

:

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

תשובות

ב-1

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{\sqrt{n}\cdot e^{\sqrt{n}}}, f(x)=\frac{7}{\sqrt{x}\cdot e^{\sqrt{x}}}, h(x)=e^{\sqrt{x}}, g(x)=\sqrt{x}$ ידוע כי g,f פונקציות חיוביות ועולות, אז גם הפונקציה $\sqrt{x}\cdot e^{\sqrt{x}}$ חיובית ועולה כמכפלת פונקציות כאלו, ולכן f חיובית ויורדת בתור שבע חלקי פונקציה חיובית ועולה. גם ברור כי $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$. לכן אפשר להסתמך על מבחן האינטגרל והטור מתכנס אם ורק אם האינטגרל מתכנס, ומתקיים.

$$I=\int_1^{\infty}\frac{7}{\sqrt{x}\cdot e^{\sqrt{x}}}, t=\sqrt{x}, dt=\frac{dx}{2\sqrt{x}}, dx=2tdt, I=\int_1^{\infty}\frac{dt}{2e^t}=\frac{-1}{2e^t}\bigg|_{\ln 1}^{\infty}=\frac{1}{2e}-\frac{1}{2e^{\infty}}=\frac{1}{2e}.$$

ולכן האינטגרל מתכנס ולכן הטור מתכנס.

.2

$$\frac{3x^2-16x+15}{x(x^2-4x+3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-3}, 3x^2-16x+15=A(x-1)(x-3)+Bx(x-3)+Cx(x-1).$$

$$\to 3A=15, -2B=2, 6C=-6, A=5, B=C=-1, \frac{3x^2-16x+15}{x(x^2-4x+3)}=\frac{5}{x}-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-3}$$

$$\int\frac{3x^2-16x+15}{x(x^2-4x+3)}dx=5\ln|x|-\ln|x-1|-\ln|x-3|+C$$

3

$f(x)=x^3-x^2+2x-5$ ו $g(x)=3x^3-6x^2+4x-5$ (8%)

$$f(x)=x^3-x^2+2x-5=g(x)=3x^3-6x^2+4x-5\to g-f=2x^3-5x^2+2x=0, x(x-2)(2x-1)=0,$$

$$x=0,0.5,2, (g-f)(1)<0, (g-f)(0.25)>0,\ A=\int_0^{0.5}(g-f)\,dx-\int_{0.5}^{2}(g-f)\,dx$$

$$\int(g-f)dx=(2/4)x^4-(5/3)x^3+x^2=h(x). A=2h(0.5)-h(2)-h(0).$$

$$h(0.5)=\frac{1}{32}-\frac{5}{24}+\frac{1}{4}=\frac{3-20+24}{96}=\frac{7}{96}, h(2)=8-\frac{40}{3}+4=12-\frac{40}{3}=-\frac{4}{3}.$$

$$A=2h(0.5)-h(2)-h(0)=\frac{7}{96}+\frac{7}{96}+\frac{4}{3}=\frac{7}{48}+\frac{4}{3}=\frac{7+64}{48}=\frac{71}{48}$$

.4 חשב את אורך הקשת של העקומה $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ (8%)

בתחום: $\frac{1}{8}\le x\le 1$.

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1\to y=(1-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}\to y'=\frac{3}{2}(1-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}},(y')^2=(1-x^{\frac{2}{3}})x^{\frac{-2}{3}}=x^{\frac{-2}{3}}-1,$$

$$\sqrt{(y')^2+1}=x^{\frac{-1}{3}},\int\sqrt{(y')^2+1}dx=\frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2}=L(x),L(1)-L(1/8)=(\frac{3}{2}-\frac{3}{8})=\frac{9}{8}.$$

5

$$\int_1^\infty\frac{\cos(-2x)}{x\sqrt{x}}dx=?,\ f(x)=\frac{1}{x^{3/2}},g(x)=\cos(-2x)=\cos(2x),\int_a^b\cos(2x)dx=$$

$$=\frac{\sin(2x)}{2}\bigg|_a^b=\frac{\sin(2b)-\sin(2a)}{2},|\int_a^b\cos(2x)dx|\le\frac{1+1}{2}=1.\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{3/2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\infty}=0.$$

$$(\frac{1}{e^{4x}})'=-\frac{3x^{1/2}}{2(x^{3/2})^2}=\frac{-3}{2x^{5/2}}.(f'<0)\leftrightarrow(x>0)$$

לכן האינטגרל מתכנס לפי משפט דיריכלה להתכנסות אינטגרלים לא אמיתיים.

6

$$2n(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{1}{n^2+2^2}+\frac{1}{n^2+3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2})$$

$$=\frac{2}{n}(\frac{1}{1+(1/n)^2}+\frac{1}{1+(2/n)^2}+\frac{1}{1+(3/n)^2}+\cdots+\frac{1}{1+(n/n)^2})=$$

$$\lim_{n\to\infty}2n(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{1}{n^2+2^2}+\frac{1}{n^2+3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2})=$$

$$=2\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=2\arctan(x)\big|_0^1=2(\arctan(1)-\arctan(0))=2\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}.$$

7. א

$$a_n=\frac{(n!)^2}{n^n},\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^2n^n}{n^2(n+1)^{n+1}}=\frac{(n+1)}{n^2}(\frac{n}{n+1})^n=\frac{1}{n}\frac{(n+1)}{n}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}.\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{\infty}1\cdot\frac{1}{e}=0<1$$

הטור מתכנס לפי מבחן ד׳אלמברט

ב: $\sum_{n=2}^\infty\frac{n+\ln n}{n\cdot\ln n}$ $\qquad a_n=\frac{n+\ln n}{n\cdot\ln n}>\frac{n}{n\cdot\ln n}=\frac{1}{\ln n}$. נוכיח אי שויון

$(\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n})\leftrightarrow(\frac{\ln n}{n}<1).\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}\doteq\lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{1}=0.$ הטור מתבדר לפי מבחן ההשואה כיון שהוא גדול מטור מתבדר.

ג.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{0.5^n}{(1-\frac{5}{3n+9})^{n^2}},\sqrt[n]{a_n}=\frac{0.5}{(1-\frac{5}{3n+9})^n}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=?,\lim_{n\to\infty}(-\frac{5}{3n+9})n=\frac{-5}{3},\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\frac{0.5}{e^{\frac{-5}{3}}}=\frac{e^{\frac{5}{3}}}{2}>\frac{e}{2}>1$$

הטור מתבדר לפי מבחן השרש.

ד: $.\ \ \frac{9}{n^2}\le\frac{9}{n^2\cdot\ln n}=\frac{1\cdot(1+8)}{n^2\cdot\ln n}\le|a_n|,\frac{\cos(n!)+8}{n^2\cdot\ln n}a_n=(-1)^n$ כיון שטור האיברים

בהחלט מתכנס, הטור מתכנס בהחלט ולכן מתכנס.

:

ה:

$$a_n=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)},\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(2n+1)}{(2n+2)}=\frac{2+1/n}{2+2/n},\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1.n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=n[(\frac{2n+2}{2n+1})-1]=$$

$$=\frac{n}{2n+1}.\lim_{n\to\infty}n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=\frac{1}{2}$$

והטור מתבדר לפי מבחן ראבה.