



**מבחן אמצע בקורס אינפי ב – סמסטר קיץ התשע"ד**

יום ד, טו אלול ה'תשע"ד 10-9-2014

- המורה: גיורא דולה.
- משך המבחן: שעתיים
- הציון המירבי האפשרי הוא 100 נקודות.
- מותרים מחשבוניס שאינם מדעיים.
- ענה על כל השאלות

בהצלחה

(כל סעיף-20%)

1. פתור את חמשת האינטגרלים הבאים:

א. חשב  $\int \frac{4x^2 + 26x + 79}{(x+2)(x+5)^2} dx$

ב. חשב  $\int e^{5x} \cdot \sin(2x) dx$

ג. חשב  $\int \frac{dx}{-5 \sin x + 10 \cos x + 11}$

ד. חשב  $\int \frac{2\sqrt{x+1} + 1}{x + \sqrt{x+1} + 12} dx$

ה. חשב  $\int \sin^7 x \cdot \cos^5 x dx$

בהצלחה!!!

## דף נוסחאות

1. נוסחאות הכפל ופירוק לגורמים:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b), \quad (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3,$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2), \quad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

2. משוואה ריבועית

א. פתרון המשוואה  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) הוא  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

ב. פירוק הטרינום  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

3. חזקות ושורשים

$$a^x a^y = a^{x+y}, \quad (ab)^x = a^x b^x, \quad \sqrt[x]{a} = a^{\frac{1}{x}}, \quad \sqrt[x]{a^y} = a^{\frac{y}{x}},$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-x} = \frac{b^x}{a^x}, \quad a^0 = 1,$$

$$(a^x)^y = a^{xy}, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \quad \sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[x]{b} = \sqrt[x]{ab}$$

4. לוגריתמים.

הגדרת ה-log:  $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$

תחום ההגדרה:  $\log_a x$  מוגדר רק כאשר  $0 < a, a \neq 1$  ו-  $x > 0$ .

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y, \quad \log_a x^y = y \cdot \log_a x;$$

$$\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y, \quad \log_a \sqrt[y]{x} = \frac{1}{y} \cdot \log_a x;$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \quad \log_a x = \frac{1}{\log_x a};$$

$$a^{\log_a x} = x, \quad \ln x = \log_e x, \quad e = 2.718281828\dots$$

$$\ln x = a \Rightarrow x = e^a$$

5. הגדרת נגזרת הפונקציה  $f$  בנקודה  $x_0$ :  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

## 6. נגזרות בסיסיות.

$$\begin{aligned} (x^a)' &= ax^{a-1}, & (a^x)' &= \ln a \cdot a^x; \\ (\sin x)' &= \cos x, & (e^x)' &= e^x; \\ (\cos x)' &= -\sin x, & (\log_a x)' &= \frac{1}{x \cdot \ln a}; \\ (\tan x)' &= \frac{1}{\cos^2 x}, & (\cot x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x}; \\ (\ln x)' &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

## 7. כללי גזירה

$$\begin{aligned} (a \cdot f(x))' &= a \cdot f'(x); \\ (f(x) \pm g(x))' &= f'(x) \pm g'(x); \\ (f(x)g(x))' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x); \\ (f(x)g(x)h(x))' &= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x) \\ \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right)' &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}; \\ (f(g(x)))' &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \end{aligned}$$

## 8. אינטגרלים מיידיים

$$\begin{aligned} \int 0 dx &= C; \\ \int \frac{1}{x} dx &= \ln |x| + C; \\ \int \cos x dx &= \sin x + C; \\ \int \sin x dx &= -\cos x + C; \\ \int e^x dx &= e^x + C; \\ \int a^x dx &= \frac{1}{\ln a} a^x + C; \\ \int x^a dx &= \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C, a \neq -1; \\ \int \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \tan x + C; \\ \int \frac{1}{\sin^2 x} dx &= -\cot x + C \\ \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx &= \arcsin \frac{x}{a} + C; \\ \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx &= \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \end{aligned}$$

9. כללי אינטגרציה.

$$\int (f(x) \pm d(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$$

$$\int af(x)dx = a \int f(x)dx;$$

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C;$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

אינטגרציה בחלקים בנסוח אחר:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

החלפת משתנה אינטגרציה:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, t = g(x)$$

10. שמושי אינטגרלים

א. שטח :  $S = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$

ב. שטח בקואורדינטות קטביות:  $S = \frac{1}{2} \int_a^b r^2(\varphi)d\varphi$

ג. נפח גוף סבוב סביב ציר x:  $V = \pi \int_a^b (g^2(x) - f^2(x))dx$

ד. נפח גוף סבוב סביב ציר y:  $V = 2\pi \int_a^b xf(x)dx$

ה. אורך קו:  $l = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$

11.

א. הזהויות היסודיות הטריגונומטריות

$\pi$  רדיאן שווים ל-180 מעלות.

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

$$\tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \tan x \cdot \cot x = 1;$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x};$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

**ב. סכום והפרש זוויות**

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta). \quad :$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

**ג. זוויות כפולות וחצויות:**

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha).$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha).$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}.$$

$$\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2(\alpha) - 1}{2\cot(\alpha)}.$$

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}.$$

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}.$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}}.$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{2}}.$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}.$$

$$\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}. \quad :$$

**ד. סכומים והפרשים:**

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right).$$

$$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right). \quad :$$

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right).$$

$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

ה. מכפלות:

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}.$$

$$\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}{2}.$$

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2}.$$

$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}.$$

פתרונות

(כל סעיף-20%)

פתור את חמשת האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{4x^2 + 26x + 79}{(x+2)(x+5)^2} dx$$

א. חשב

תשובה

$$\frac{4x^2 + 26x + 79}{(x+2)(x+5)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+5} + \frac{C}{(x+5)^2}, 4x^2 + 26x + 79 = A(x+5)^2 + B(x+2)(x+5) + C(x+2)$$

$$-3C = 49, 9A = 43, 25A + 10B + 2C = 79, C = \frac{-49}{3}, A = \frac{43}{9}, B = -\frac{7}{9}$$

$$\frac{43}{9(x+2)} + \frac{-7}{9(x+5)} + \frac{-147}{9(x+5)^2} = \frac{43(x+5)^2 - 7(x+2)(x+5) - 147(x+2)}{9(x+2)(x+5)^2} =$$

$$= \frac{36x^2 + (430 - 49 - 147)x + (1075 - 70 - 294)}{9(x+2)(x+5)^2} =$$

$$= \frac{36x^2 + 234x + 711}{9(x+2)(x+5)^2} = \frac{4x^2 + 26x + 79}{(x+2)(x+5)^2}$$

$$\int \frac{4x^2 + 26x + 79}{(x+2)(x+5)^2} dx = \int \left( \frac{43}{9(x+2)} + \frac{-7}{9(x+5)} + \frac{-147}{9(x+5)^2} \right) dx = \frac{43}{9} \ln|x+2| - \frac{7}{9} \ln|x+5| + \frac{147}{9(x+5)} + C$$

$$\int e^{5x} \cdot \sin(2x) dx$$

ב. חשב

תשובה

$$I = \int e^{5x} \cdot \sin(2x) dx, f = e^{5x}, g' = \sin(2x), f' = 5e^{5x}, g = \frac{-\cos(2x)}{2}, I = \frac{-\cos(2x)e^{5x}}{2} + \int \frac{5\cos(2x)e^{5x}}{2} dx,$$

$$f = e^{5x}, g' = \cos(2x), f' = 5e^{5x}, g = \frac{\sin(2x)}{2}, I = \frac{-\cos(2x)e^{5x}}{2} + \frac{5\sin(2x)e^{5x}}{4} - \int \frac{25\sin(2x)e^{5x}}{4} dx \rightarrow$$

$$\frac{29}{4} I = \frac{-2\cos(2x)e^{5x}}{4} + \frac{5\sin(2x)e^{5x}}{4}, I = \frac{e^{5x}}{29} (5\sin(2x) - 2\cos(2x)) + C$$

$$\int \frac{dx}{-5\sin x + 10\cos x + 11}$$

ג. חשב



תשובה

$$I = \int \frac{dx}{5 \sin x + 12 \cos x + 13}, x = 2 \arctan(t), dx = \frac{2}{1+t^2}, \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$I = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5 \frac{2t}{1+t^2} + 12 \frac{1-t^2}{1+t^2} + 13} = \int \frac{2dt}{10t + 12(1-t^2) + 13(1+t^2)} = \int \frac{2dt}{t^2 + 10t + 25} = 2 \int \frac{dt}{(t+5)^2} = \frac{-2}{t+5} + C =$$

$$= \frac{-2}{\tan(x/2) + 5} + C =$$

$$\int \frac{2\sqrt{x+1} + 1}{x + \sqrt{x+1} + 12} dx$$

ד. חשב

תשובה

$$I = \int \frac{2\sqrt{x+1} + 1}{x + \sqrt{x+1} + 12} dx, t = \sqrt{x+1}, t^2 - 1 = x, dx = 2t dt, I = \int \frac{2t+1}{(t^2-1)+t+12} 2t dt = \int \frac{(4t^2+2t)dt}{t^2+t+11},$$

$$\frac{4t^2+2t}{t^2+t+11} = 4 + \frac{-2t-44}{t^2+t+11} = 4 - \frac{2t+1}{t^2+t+11} - \frac{43}{t^2+t+11}, t^2+t+11 = (t+\frac{1}{2})^2 + \frac{43}{4} = (t+\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{43}}{2})^2,$$

$$I = \int (4 - \frac{2t+1}{t^2+t+11} - \frac{43}{(t+\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{43}}{2})^2}) dt = 4t - \ln(t^2+t+11) - \frac{43}{\frac{\sqrt{43}}{2}} \arctan(t^2+t+11) + C =$$

$$= 4t - \ln(t^2+t+11) - \frac{2}{\sqrt{43}} \arctan(t^2+t+11) + C =$$

$$= 4\sqrt{x+1} - \ln(x + \sqrt{x+1} + 12) - \frac{2}{\sqrt{43}} \arctan(x + \sqrt{x+1} + 12) + C$$

$$\int \sin^7 x \cdot \cos^5 x dx$$

ה. חשב

תשובה

$$I = \int \sin^7 x \cdot \cos^5 x dx, \sin^7 x \cdot \cos^5 x = \sin^7 x \cos^4 x \cos x = \sin^7 x (1 - \sin^2 x)^2 \cos x =$$

$$= (\sin^7 x - 2\sin^9 x + \sin^{11} x) \cos x, I = \int (\sin^7 x - 2\sin^9 x + \sin^{11} x) \cos x dx, t = \sin(x), dt = \cos(x) dx,$$

$$I = \int (t^7 - 2t^9 + t^{11}) dt = \frac{t^8}{8} - \frac{2t^{10}}{10} + \frac{t^{12}}{12} + C = \frac{(\sin x)^8}{8} - \frac{(\sin x)^{10}}{5} + \frac{(\sin x)^{12}}{12} + C$$