

המכללה האקדמית נתניה

מבחן אמצע באינפי ב'

שם המרצה: ד"ר גיורא דולה

תאריך הבחינה: יום ב כז אלול התשע"ג 2-9-2013

משך הבחינה: שעה וחצי

חומר עזר: מחשבון (לא גרפי).

1. פתור את האינטגרלים הבאים: (60%)

א. חשב $\int \frac{2x^5 + 4x - 19x^3 - 27}{x^4 - 9x^2} dx$

ב. חשב $\int \sin(\ln x) dx$

ג. חשב $\int \frac{dx}{2 \sin x + \cos x + 2}$

2. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$ (40%)

חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א: תחום הגדרה

ב: נקודות חיתוך עם הצירים.

ג: זוגיות/אי-זוגיות הפונקציה.

ד: תחומי עליה וירידה.

ה: נקודות קיצון.

ו: נקודות פיתול, תחומי קמירות כלפי מעלה וקמירות כלפי מטה.

ז: אסימפטוטות אנכיות ומשופעות.

ח: שרטט את גרף הפונקציה.

בהצלחה!!!

דף נוסחאות

1. נוסחאות הכפל ופירוק לגורמים:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b), \quad (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3,$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2), \quad a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

2. משוואה ריבועית

א. פתרון המשוואה $ax^2 + bx + c = 0$ (הוא $a \neq 0$) הוא $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

ב. פירוק הטרינום $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

3. חזקות ושורשים

$$a^x a^y = a^{x+y}, \quad (ab)^x = a^x b^x, \quad \sqrt[x]{a} = a^{\frac{1}{x}}, \quad \sqrt[x]{a^y} = a^{\frac{y}{x}},$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-x} = \frac{b^x}{a^x}, \quad a^0 = 1,$$

$$(a^x)^y = a^{xy}, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \quad \sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[x]{b} = \sqrt[x]{ab}$$

4. לוגריתמים.

הגדרת ה-log: $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$

תחום ההגדרה: $\log_a x$ מוגדר רק כאשר $x > 0$ ו- $0 < a, a \neq 1$

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y, \quad \log_a x^y = y \cdot \log_a x;$$

$$\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y, \quad \log_a \sqrt[y]{x} = \frac{1}{y} \cdot \log_a x;$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \quad \log_a x = \frac{1}{\log_x a};$$

$$a^{\log_a x} = x, \quad \ln x = \log_e x, \quad e = 2.718281828\dots$$

$$\ln x = a \Rightarrow x = e^a$$

5. הגדרת נגזרת הפונקציה f בנקודה x_0 : $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

6. נגזרות בסיסיות.

$$\begin{aligned}
(x^a)' &= ax^{a-1}, & (a^x)' &= \ln a \cdot a^x; \\
(\sin x)' &= \cos x, & (e^x)' &= e^x; \\
(\cos x)' &= -\sin x, & (\log_a x)' &= \frac{1}{x \cdot \ln a}; \\
(\tan x)' &= \frac{1}{\cos^2 x}, & (\cot x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x}; \\
(\ln x)' &= \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

7. כללי גזירה

$$\begin{aligned}
(a \cdot f(x))' &= a \cdot f'(x); \\
(f(x) \pm g(x))' &= f'(x) \pm g'(x); \\
(f(x)g(x))' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x); \\
(f(x)g(x)h(x))' &= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x) \\
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}; \\
(f(g(x)))' &= f'(g(x)) \cdot g'(x)
\end{aligned}$$

8. אינטגרלים מיידיים

$$\begin{aligned}
\int 0 dx &= C; \\
\int \frac{1}{x} dx &= \ln |x| + C; \\
\int \cos x dx &= \sin x + C; \\
\int \sin x dx &= -\cos x + C; \\
\int e^x dx &= e^x + C; \\
\int a^x dx &= \frac{1}{\ln a} a^x + C; \\
\int x^a dx &= \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C, a \neq -1; \\
\int \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \tan x + C; \\
\int \frac{1}{\sin^2 x} dx &= -\cot x + C \\
\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx &= \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C; \\
\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx &= \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C
\end{aligned}$$

9. כללי אינטגרציה.

$$\int (f(x) \pm d(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$$

$$\int af(x)dx = a \int f(x)dx;$$

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C;$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

אינטגרציה בחלקים בנסוח אחר:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

החלפת משתנה אינטגרציה:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, t = g(x)$$

10. שמושי אינטגרלים

א. שטח : $S = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$

ב. שטח בקואורדינטות קטביות: $S = \frac{1}{2} \int_a^b r^2(\varphi)d\varphi$

ג. נפח גוף סבוב סביב ציר x: $V = \pi \int_a^b (g^2(x) - f^2(x))dx$

ד. נפח גוף סבוב סביב ציר y: $V = 2\pi \int_a^b xf(x)dx$

ה. אורך קו: $l = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2} dx$

11.

א.הזהויות היסודיות הטריגונומטריות

π רדיאן שווים ל-180 מעלות.

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

$$\tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \tan x \cdot \cot x = 1;$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x};$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

ב. סכום והפרש זוויות

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta). \quad :$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

ג. זוויות כפולות וחצויות:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha).$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha).$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}.$$

$$\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2(\alpha) - 1}{2\cot(\alpha)}.$$

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}.$$

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}.$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}}.$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{2}}.$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}.$$

$$\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}. \quad :$$

ד. סכומים והפרשים:

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right).$$

$$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right). \quad :$$

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right).$$

$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

ה. מכפלות:

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}$$

$$\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}{2}$$

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2}$$

$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}$$

פתרונות

תרגיל 1-א

$$\int \frac{2x^5 + 4x - 19x^3 - 27}{x^4 - 9x^2} dx, \frac{2x^5 + 4x - 19x^3 - 27}{x^4 - 9x^2} = \frac{2x(x^4 - 9x^2) - x^3 + 4x - 27}{x^4 - 9x^2},$$

$$\frac{-x^3 + 4x - 27}{x^4 - 9x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-3} + \frac{D}{x+3} \rightarrow Ax(x^2 - 9) + B(x^2 - 9) + Cx^2(x+3) + Dx^2(x-3) =$$

$$= -x^3 + 4x - 27, x=0, -9B = -27, B=3, x=3, 54C = -42, C = \frac{-7}{9}, x=-3, -54D = -12,$$

$$D = \frac{2}{9}, (A+C+D)x^3 = -x^3, A - \frac{5}{9} = -1, A = \frac{-4}{9}, \frac{-x^3 + 4x - 27}{x^2(x^2 - 9)} = \frac{-4}{9x} + \frac{3}{x^2} - \frac{7}{9(x-3)} + \frac{2}{9(x+3)} =$$

$$-4x(x^2 - 9) + 27(x^2 - 9) - 7x^2(x+3) + 2x^2(x-3) = -9x^3 + 0x^2 + 36x - 243.$$

$$\int \frac{2x^5 + 4x - 19x^3 - 27}{x^4 - 9x^2} dx = \int \left(2x - \frac{4}{9x} + \frac{3}{x^2} - \frac{7}{9(x-3)} + \frac{2}{9(x+3)}\right) dx = x^2 - \frac{4}{9} \ln|x| - \frac{3}{x} - \frac{7}{9} \ln|x-3| + \frac{2}{9} \ln|x+3| + C$$

תרגיל 1-ב

$$\int \sin(\ln x) dx = \int 1 \sin(\ln x) dx,$$

$$f' = 1, g = \sin(\ln x), f = x, g' = \frac{\cos(\ln x)}{x}, \int \sin(\ln x) dx = x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx,$$

$$f' = 1, g = \cos(\ln x), f = x, g' = \frac{-\sin(\ln x)}{x}, \int \sin(\ln x) dx = x \sin(\ln x) - (x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) dx)$$

$$2I = x \sin(\ln(x)) - x \cos(\ln(x)), I = \frac{x \sin(\ln x)}{2} - \frac{x \cos(\ln(x))}{2} + c$$

סעיף ג

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{2 \sin x + \cos x + 2} \\ & \int \frac{dx}{2 + 2 \sin(x) + \cos(x)} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2 + 2 \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{2(1+t^2) + 4t + 1 - t^2} = \int \frac{2dt}{3 + 4t + t^2} = \\ & = 2 \int \frac{dt}{(t+1)(t+3)} = \int \frac{dt}{t+1} - \int \frac{dt}{t+3} = \ln |t+1| - \ln |t+3| + c = \ln \left| \tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1 \right| - \ln \left| \tan\left(\frac{x}{2}\right) + 3 \right| + c. \end{aligned}$$

תרגיל 2

חקור את

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

תחום הגדרה

$$f: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

ב: נקודות חיתוך עם הצירים.

$$(x=0) \leftrightarrow (y=0)$$

ג: זוגיות/אי-זוגיות הפונקציה.

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x-1)^2} = \frac{-x^3}{(x+1)^2} \neq \pm f(x) \quad \text{תחום ההגדרה סימטרי ו}$$

ולכן זו אינה פונקציה אי-זוגית.

ד: תחומי עליה וירידה. ה: נקודות קיצון. ו: נקודות פיתול, תחומי קמירות כלפי מעלה וקמירות כלפי מטה.

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}, f'(x) = \frac{3x^2(x-1)^2 - 2(x-1) \cdot x^3}{(x-1)^4} = \frac{x^2(x-1)[3(x-1) - 2x]}{(x-1)^4} = \frac{x^2(x-1)(x-3)}{(x-1)^4} = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3},$$

$$f'' = \frac{(3x^2 - 6x)(x-1)^3 - 3(x-1)^2 x^2(x-3)}{(x-1)^6} = \frac{3x(x-1)^2[(x-2)(x-1) - x(x-3)]}{(x-1)^6} = \frac{6x}{(x-1)^4}.$$

נקודות קריטיות עבור f' הן 0, 1, 3, וכל הנקודות הקריטיות של f'' הן גם של f' .
 נביט בקטעים והקרנים הבאים $(-\infty, 0)(0, 1)(1, 3)(3, \infty)$
 לכל אחד נבחר נציג ונציב ב- f', f'' ונקבל. בקרן השמאלית f עולה ובוכה, בקטע
 מימינו f עולה ומחייכת, מימינו f יורדת ומחייכת, ומימינו f עולה ומחייכת.

לכן 0 נקודת פתול, ו-3 נקודת מינימום מקומי. 1 היא נקודה מחוץ לתחום
 ההגדרה וקיימת בה אסימטוטה אנכית. עבור אסימפטוטה משופעת ב $\pm\infty$ נקבל

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x(x-1)^2} = 1, b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 1x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} - \frac{x(x-1)^2}{(x-1)^2} = 2$$

. $\pm\infty$ אסימפטוטה משופעת ב $y=x+2$