המכללה האקדמית נתניה

מבחן אמצע באינפי ב׳

שם המרצה: ד״ר גיורא דולה
תאריך הבחינה:
משך הבחינה: שעה וחצי
חומר עזר: מחשבון (לא גרפי).
<u>ענה על כל חמשת השאלות הבאות:</u>

1. חשב $\int \frac{7x^3+2x^2+20x-4}{x^2(x^2+4)}dx$

2. חשב $\int e^{-3x}\cdot\cos(2x)dx$

3. חשב $\int \sin^{11}(5x)\cos^5(5x)dx$

4. חשב $\int \frac{\sqrt{x+2}+2}{x-5\cdot\sqrt{x+2}+8}dx$

5. חשב $\int \frac{6}{5-5\sin x+4\cos x}dx$

בהצלחה!!!

דף נוסחאות

1. נוסחאות הכפל ופירוק לגורמים:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b), \quad (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3,$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2), a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

2. משוואה ריבועית

א. פתרון המשוואה $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ הוא $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

ב. פירוק הטרינום $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

3. חזקות ושורשים

$$a^x a^y = a^{x+y}, (ab)^x = a^x b^x, \sqrt[x]{a} = a^{\frac{1}{x}}, \sqrt[x]{a^y} = a^{\frac{y}{x}},$$
$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}, \left(\frac{a}{b}\right)^{-x} = \frac{b^x}{a^x}, a^0 = 1,$$
$$\left(a^x\right)^y = a^{xy}, a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[x]{b} = \sqrt[x]{ab}$$

4. לוגריתמים.

הגדרת ה-log: $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$

תחום ההגדרה: $\log_a x$ מוגדר רק כאשר $x > 0$ ו $0 < a, a \neq 1$.

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y, \qquad \log_a x^y = y \cdot \log_a x;$$
$$\log_a (x / y) = \log_a x - \log_a y, \qquad \log_a \sqrt[y]{x} = \tfrac{1}{y} \cdot \log_a x;$$
$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \qquad \log_a x = \frac{1}{\log_x a};$$
$$a^{\log_a x} = x, \qquad \ln x = \log_e x, e = 2.718281828\ldots$$
$$\ln x = a \Rightarrow x = e^a$$

5.הגדרת נגזרת הפונקציה f בנקודה x_0: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

6. נגזרות בסיסיות.

$$\left(x^a\right)' = ax^{a-1}, \qquad (a^x)' = \ln a \cdot a^x;$$
$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (e^x)' = e^x;$$
$$(\cos x)' = -\sin x, \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a};$$
$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$
$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

7. כללי גזירה

$$(a\cdot f(x))'=a\cdot f'(x);$$
$$(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x);$$
$$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x);$$
$$(f(x)g(x)h(x))'=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x).$$
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)};$$
$$(f(g(x))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

8. אינטגרלים מיידים

$$\int 0dx=C;$$
$$\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+C;$$
$$\int \cos xdx=\sin x+C;$$
$$\int \sin xdx=-\cos x+C;$$
$$\int e^x dx=e^x+C;$$
$$\int a^x dx=\frac{1}{\ln a}a^x+C;$$
$$\int x^a dx=\frac{1}{a+1}x^{a+1}+C, a\neq -1;$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x+C;$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx=-\cot x+C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\arcsin(\frac{x}{a})+C;$$
$$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a})+C$$

9. כללי אינטגרציה.

$$\int (f(x) \pm d(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$$
$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx;$$
$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C;$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

אינטגרציה בחלקים בנסוח אחר:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

החלפת משתנה אינטגרציה:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, t = g(x)$$

10. שמושי אינטגרלים

א.שטח : $S = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$

ב. שטח בקואורדינטות קטביות: $S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$

ג. נפח גוף סבוב סביב ציר x: $V = \pi\int_a^b (g^2(x) - f^2(x))dx$

ד. נפח גוף סבוב סביב ציר y: $V = 2\pi\int_a^b xf(x)dx$

ה. אורך קו: $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$

.11

א.הזהויות היסודיות הטריגונומטריות

π רדיאן שווים ל-180 מעלות.

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$
$$\tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \tan x \cdot \cot x = 1;$$
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x};$$
$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

ב. סכום והפרש זוויות

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta).$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta).$$:
$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

ג. זוויות כפולות וחצויות:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha).$$
$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha).$$
$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}.$$
$$\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2(\alpha)-1}{2\cot(\alpha)}.$$
$$\sin^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}.$$
$$\cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}.$$
$$\sin(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}.$$
$$\cos(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}.$$
$$\tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$:
$$\tan^2(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$

ד. סכומים והפרשים:

$$\sin(\alpha)+\sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$
$$\sin(\alpha)-\sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}).$$:
$$\cos(\alpha)+\cos(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$
$$\cos(\alpha)-\cos(\beta) = -2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

ה. מכפלות:

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$
$$\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$:
$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$
$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

פתרונות

1. בתרגיל $\int \frac{7x^3+2x^2+20x-4}{x^2(x^2+4)}dx$ דרגת המכנה גדולה מדרגת המונה,

ולכן אפשר לגשת ישר לשלב השברים החלקיים, ונקבל

$$\frac{7x^3+2x^2+20x-4}{x^2(x^2+4)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+4}\to Ax(x^2+4)+B(x^2+4)+(Cx+D)x^2=$$

$$=7x^3+2x^2+20x-4\to(A+C)x^3+(B+D)x^2+4Ax+4B=7x^3+2x^2+20x-4\to$$

$$B=-1,A=5,D=3,C=2,\int\frac{7x^3+2x^2+20x-4}{x^2(x^2+4)}dx=\int(\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2x+3}{x^2+4})dx=$$

$$=5\ln|x|+\frac{1}{x}+\ln(x^2+4)+\frac{3}{2}\arctan(\frac{x}{2})+c$$

2.

$$I=\int e^{-3x}\cdot\cos(2x)dx,\ f'=e^{-3x},g=\cos(2x),\ f=\frac{-e^{-3x}}{3},g'(x)=-2\sin(2x),I=\frac{-e^{-3x}\cos(2x)}{3}$$

$$-\frac{2}{3}\int e^{-3x}\cdot\sin(2x)dx,\ f'=e^{-3x},g(x)=\sin(2x),\ f=\frac{-e^{-3x}}{3},g'(x)=2\cos(2x),I=\frac{-e^{-3x}\cos(2x)}{3}$$

$$-\frac{2}{3}(\frac{-e^{-3x}\sin(2x)}{3}-\int\frac{-e^{-3x}}{3}\cdot2\cos(2x)dx),I=\frac{2e^{-3x}\sin(2x)}{9}-\frac{e^{-3x}\cos(2x)}{3}-\frac{4}{9}I,$$

$$\frac{4}{9}I=\frac{2e^{-3x}\sin(2x)}{9}-\frac{e^{-3x}\cos(2x)}{3},I=\frac{e^{-3x}\sin(2x)}{2}-\frac{3e^{-3x}\cos(2x)}{4}$$

3.

$$I=\int\sin^{11}(5x)\cos^5(5x)dx=?,\cos^5(5x)=\cos^4(5x)\cos(5x)=(1-\sin^2(x))^2\cos(x),u=\sin(x),$$

$$du=\cos(x)dx,I=\int u^{11}(1-u^2)^2du=\int(u^{11}-2u^{13}+u^{15})du=\frac{u^{12}}{12}-\frac{u^{14}}{7}+\frac{u^{16}}{16}+c=$$

$$=\frac{(\sin(x))^{12}}{12}-\frac{(\sin(x))^{14}}{7}+\frac{(\sin(x))^{16}}{16}+c$$

4.

$$I=\int\frac{\sqrt{x+2}+2}{x-5\cdot\sqrt{x+2}+8}dx=\int\frac{\sqrt{x+2}+2}{x+2-5\cdot\sqrt{x+2}+6}dx,t=\sqrt{x+2},dt=\frac{dx}{2\sqrt{x+2}}=\frac{dx}{2t},dx=2tdt,$$

$$I=\int\frac{\sqrt{x+2}+2}{x+2-5\cdot\sqrt{x+2}+6}dx,=\int\frac{t+2}{t^2-5\cdot t+6}2tdt=\int\frac{2t^2+4t}{t^2-5t+6}dt,\frac{2t^2+4t}{t^2-5t+6}=2+\frac{14t-12}{t^2-5t+6}=$$

$$=2+\frac{A}{t-2}+\frac{B}{t-3},A(t-3)+B(t-2)=14t-12,B=30,-A=16,2+\frac{-16}{t-2}+\frac{30}{t-3}=\frac{2t^2+4t}{t^2-5t+6},$$

$$I=30\ln(t-3)-16\ln(t-2)+2t+c=30\ln(\sqrt{x+2}-3)-16\ln(\sqrt{x+2}-2)+2\sqrt{x+2}+c$$

$$I=\int \frac{6}{5-5\sin x+4\cos x}dx, t=\tan(\frac{x}{2}), dx=\frac{2dt}{1+t^2}, \sin(x)=\frac{2t}{1+t^2}, \cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2}. \frac{dx}{dt}=\frac{2}{1+t^2},$$

$$\int \frac{6dx}{5-5\sin x+4\cos x}=\int \frac{6\frac{2dt}{1+t^2}}{5-5\frac{2t}{1+t^2}+4\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int \frac{12dt}{5(1+t^2)-10t+4(1-t^2)}=$$

.5

$$=\int \frac{12dt}{t^2-10t+9}, \frac{12dt}{t^2-10t+9}=\frac{A}{t-9}+\frac{B}{t-1}, A(t-1)+B(t-9)=12, 8A=12,$$

$$\frac{12dt}{t^2-10t+9}=\frac{3}{2(t-9)}-\frac{3}{2(t-1)}, I=1.5\ln(\frac{t-9}{t-1})+c=1.5\ln(\frac{\tan(\frac{x}{2})-9}{\tan(\frac{x}{2})-1})+c$$