

שעורי אינפי ב' התשע"ד

שם המורה: גיורא דולה

הפונקציות האלמנטריות

הפונקציות האלמנטריות הן הפונקציות הפולינומיאליות, המעריכיות, הטריגונומטריות וכן כל פונקציה שמתקבלת מהן על ידי חבור חסור כפל חלוק הרכבה והפוך.

נגזרות הפונקציות האלמנטריות

כל הפונקציות האלמנטריות (רציפות) וגזירות בכל תחום הגדרתן ומקיימות את החוקים הבאים:

$$\begin{aligned} & 1. (x^a)' = ax^{a-1} \quad 2. (a^x)' = a^x \ln(a) \quad 3. (e^x)' = e^x \quad 4. (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln(a)} \\ & 5. (\sin x)' = \cos x \quad 6. (\cos x)' = -\sin x \quad 7. (\ln x)' = \frac{1}{x} \\ & 8. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad 9. (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \\ & 10. (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad 11. (\operatorname{arccot} x)' = \frac{-1}{1+x^2} \\ & 12. (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad 13. (\cot x)' = \frac{-1}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

כלל השרשרת

נניח כי נתונה פונקציה שהיא תוצאת הרכבה $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ ונניח כי f גזירה בנקודה a וכי g גזירה בנקודה $f(a)$. אז $g \circ f$ גזירה בנקודה $f(a)$ ומקימת את כלל השרשרת.

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$$

נניח כי f פונקציה מציר x לציר y , ו g פונקציה מציר y לציר z , אז לייבניץ סימן את f' בסימן $\frac{dy}{dx}$, את g' בסימן $\frac{dz}{dy}$, ואת $(g \circ f)'$ בסימן $\frac{dz}{dx}$,

אז כלל השרשרת בסימון של לייבניץ הוא $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}$. נשתמש בגזירה

בסימון של ניוטון ובשיטת ההצבה באינטגרלים, בסימון של לייבניץ.

דוגמא

$$e^{5x} = g(f(x)), g(x) = e^x, f(x) = 5x, g'(x) = g(x), f'(x) = 5, g'(f(x)) = e^{5x}, (e^{5x})' = e^{5x} \cdot 5.$$

דוגמא

$\arcsin(x)$ היא פונקציה הפוכה לפונקציה $\sin(x)$ ולכן לפי הגדרת פונקציות הפוכות מתקיים $\arcsin(\sin(x))=x$. נגזור את שני האגפים, באגף שמאל נשתמש בכלל השרשרת ונקבל $\arcsin'(\sin(x))\cos(x)=1$, ולכן נסמן $\sin(x)=a$. $\cos(x)=\sqrt{1-\sin^2(x)}=\sqrt{1-a^2}$, ולכן נקבל את מה שכתוב בטבלה

$$\arcsin'(a) = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}$$

גזירה לוגריתמית

ישנן פונקציות מעריכיות שבהן המשתנה x מופיע גם בבסיס וגם במעריך. אי אפשר לגזור אותן לפי כלל 1, ששם המעריך קבוע, וגם לא לפי כלל 2 ששם הבסיס קבוע. נאלץ להשתמש בתחבולה. כידוע פונקצית החזקה והפונקציה הלוגריתמית הפוכות זו לזו, והרכבתן זו על זו היא פונקצית הזהות, ולכן $f(x)^{g(x)} = e^{\ln(f(x)^{g(x)})} = e^{g(x)\ln(f(x))}$. נגזור ונשווה את שני האגפים כאשר נתיחס לאגף ימין כאל פונקציה מורכבת שבה החיצונית היא e^x והפנימית היא המכפלה $g(x)\ln(f(x))$. ולכן נקבל

$$[f(x)^{g(x)}]' = e^{g(x)\ln(f(x))} [g'(x)\ln(f(x)) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}] = f(x)^{g(x)} [g'(x)\ln(f(x)) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}]$$

דוגמא

גזור את x^x . נציב בנוסחה $f(x)=g(x)=x$ ונקבל

$$(x^x)' = x^x [1\ln(x) + \frac{x1}{x}] = x^x (\ln(x) + 1).$$

כללי l'hospital

נתון הגבול $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$. כלל ליהופיטל מאפשר לחשב את הגבול במקרים $\frac{0}{0}$ ו

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

תוך שמוש בנגזרות. הכלל הוא $\frac{\infty}{\infty}$

חלק מהגבולות שקבלנו בסמסטר א כנתונים, נובעים למעשה מכלל ליהופיטל.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0$$

הרחבת כללי ליהופיטל עבור המקרה 0∞

במקרה זה נשתמש בעובדה כי $x = \frac{1}{1/x}$, ונציג $0\infty = \frac{\infty}{1/0} = \frac{\infty}{\infty}$ או

$0\infty = \frac{0}{1/\infty} = \frac{0}{0}$ נפעיל את כללי ליהופיטל על הבטוי הנוח יותר לגזירה.

דוגמא:

במקרה זה קל יותר לגזור את הראשון $\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x}}{1/x}$

מהבטויים וכך נמשיך. $\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\infty} = 0$.

הרחבת כללי ליהופיטל עבור המקרים $1^\infty, \infty^0, 0^0$

במקרה זה נשתמש בעובדה כי $e^{\ln x} = x$ ולכן $e^{\ln f^g} = e^{g \ln f}$, ונשים לב כי עבור המקרה של 1^∞ , נקבל כי $g \ln(f) = \infty \ln(1) = \infty 0$, עבור המקרה של 0^0 , נקבל כי $g \ln(f) = 0 \ln(0) = 0(-\infty)$, ועבור המקרה של ∞^0 , נקבל כי $g \ln(f) = 0 \ln(\infty) = 0\infty$, כלומר $g \ln(f)$ בכל מקרה הופך להיות המקרה 0∞ וכעת נוכל להמשיך כמקודם.

דוגמא:

חשב את $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = 1^\infty$. פתרון נפעיל את הטריק הכתוב ונקבל כי

$$(1 + \frac{1}{n})^n = e^{\ln((1 + \frac{1}{n})^n)} = e^{n \ln(1 + \frac{1}{n})}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln(1 + \frac{1}{n}) = \infty 0, \quad n \ln(1 + \frac{1}{n}) = \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}, \quad n \ln(1 + \frac{1}{n}) = \frac{n}{\frac{1}{\ln(1 + \frac{1}{n})}}$$

מבין שתי האופציות נעדיף את הראשונה אשר שואפת ל $0/0$, ונמשיך

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln(1 + \frac{1}{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{(1 + \frac{1}{n})^2}}{\frac{-1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e^1 = e$$

שמושי נגזרות לחקירת פונקציות.

להלן תכונות של פונקציות אשר חלק מהן נוכיח אח"כ.

1. נתון קטע (a,b) אשר בו f מוגדרת גזירה ומתקיים כי $f' > 0$. אז f עולה בקטע (a,b) .
2. נתון קטע (a,b) אשר בו f מוגדרת גזירה ומתקיים כי $f' < 0$. אז f יורדת בקטע (a,b) .
3. נתון קטע (a,b) אשר בו f מוגדרת גזירה ונתונה נקודת קיצון מקומי c . אז $f'(c) = 0$.
4. נתון קטע (a,b) אשר בו f מוגדרת גזירה פעמיים ומתקיים כי $f'' > 0$. אז f קמורה (מחייכת, קמורה כלפי מעלה) בקטע (a,b) .
5. נתון קטע (a,b) אשר בו f מוגדרת גזירה פעמיים ומתקיים כי $f'' < 0$. אז f קעורה (בוכה, קמורה כלפי מטה) בקטע (a,b) . הגדרה: נקודת פתול היא נקודה בתחום ההגדרה שבה מתקיים כי f קמורה מצד אחד וקעורה מצד שני.
6. נתון קטע (a,b) אשר בו f מוגדרת גזירה פעמיים ונתונה נקודת פתול c . אז $f'(c) = 0$.

דוגמאות

1. $y = 2x + 3$ עולה בכל תחום הגדרתה, ואכן $y' = 2 > 0$.
2. $y = -3x + 4$ יורדת בכל תחום הגדרתה ואכן $y' = -3 < 0$.
3. עבור $a > 0$ נביט ב $y = ax^2 + bx + c$, אז $y' = 2ax + b$ ו $y'' = 2a > 0$, ואכן y'' חיובי ו- y מחייכת תמיד. $y' > 0$ שקול ל $x > -b/2a$, כלומר y עולה החל מנקודת הקדקד, ויורדת עד הקדקד.
4. נביט על $y = x^3 - 3x$, אז $y' = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$, $y'' = 6x$. נחלק את הישר הממשי ע"י הוספת הנקודות ± 1 בהן $y' = 0$ מתאפסת, והנקודה 0 בה $y'' = 0$ מתאפסת ונקבל את טבלת הסימנים (רבי יהודה) של y', y'' . הערה חשובה: בדרך כלל יש גם להוסיף לישר הממשי גם את הנקודות בהן $y', y'' = 0$ לא מוגדרות ובמקרה שלנו אין נקודות כאלו. קבלנו 4 קטעים, $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, \infty)$, ולכל אחד מהם נבחר נציג. 2- יכול להיות נציג של $(-\infty, -1)$, 0.5- של $(-1, 0)$,

0.5 של (0,1) ו-2 של (1,∞). את הנציגים נציב ב- y', y'' ונקבל את טבלת הסימנים הבאה:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
סימן של y'	+	-	-	+
סימן של y''	-	-	+	+
התנהגות y	עולה ובוכה	יורדת ובוכה	יורדת ומחייכת	עולה ומחייכת

טבלה שכזו היא חלק חשוב בחקירה המלאה.

אסימפטוטה.

אסימפטוטה היא קו ישר אשר הפונקציה 'נדבקת' אליו. בדיחה: זהו ישר שהולך עם עקומה ולא נוגע בה. כיון שעוסקים בקווים ישרים יש לרשום את משוואות כל הקווים הישרים במישור. המשוואה $y=mx+n$ נותנת את כל הפונקציות שהן בעלות גרף שהוא ישר. m הוא השפוע. לכזה קו נקרא ישר משופע. המשוואה $x=b$ היא משוואה של קו אנכי במישור. קו זה איננו משופע ואיננו גרף של פונקציה. ישר כזה יקרא ישר אנכי. לכן נבדיל בין אסימפטוטה אנכית (שהיא קו אנכי) ובין אסימפטוטה משופעת (שהיא קו משופע).

אסימפטוטה אנכית.

הישר $x=c$ הוא אסימפטוטה אנכית של הגרף של $y=f(x)$, אם מתקיימים שני תנאים. קודם כל הערך $x=c$ איננו בתחום ההגדרה של f . בנוסף מתקיים אחד לפחות מ-4 הגבולות הבאים
 1) $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \infty$, 2) $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = -\infty$, 3) $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = -\infty$, 4) $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \infty$

תנאי הגבולות ניתן לכתוב בקיצור כך $\lim_{x \rightarrow c^\pm} f(x) = \pm\infty$

דוגמאות

$x=0$ היא אסימפטוטה אנכית של $y=1/x$.
 $x=0$ היא אסימפטוטה אנכית של $y=1/x^2$

$x=0$ איננה אסימפטוטה אנכית של $y=x^2/x$ למרות ש $x=0$ לא בתחום ההגדרה, כיון שאף אחד מ 4 הגבולות לא מתקיים.

אסימפטוטה משופעת ב ∞

הישר $y=mx+n$ הוא ישר האסימפטוטה המשופעת ב ∞ , אם

$$\text{מתקיים } m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx]$$

אסימפטוטה משופעת ב $-\infty$

הישר $y=mx+n$ הוא ישר האסימפטוטה המשופעת ב $-\infty$, אם

$$\text{מתקיים } m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, n = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx]$$

ידוע שעבור פונקציה רציונלית $\frac{p(x)}{q(x)}$, כאשר $p(x)$ ו- $q(x)$ הם

פולינומים, מתקיים כי $y=mx+n$ היא ישר אסימפטוטה משופעת ב ∞ , אם ורק אם הוא ישר אסימפטוטה משופעת ב $-\infty$, כלומר בפונקציה שכזו מספיק לבדוק את האסימפטוטה המשופעת רק בצד אחד.

דוגמא:

$$y = \frac{x^2 + 8}{x + 1}$$

מצא את כל האסימטוטות של

תשובה: הנקודת היחידה שאיננה בתחום ההגדרה של y היא

$$x = -1. \text{ מתקיים } \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 8}{x + 1} = \frac{+}{0^-} = -\infty, \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 8}{x + 1} = \frac{+}{0^+} = \infty$$

אכן זהו ישר אסימפטוטה אנכי של f . בנוסף

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 8}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 8}{(x + 1)x} = 1, n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 8}{x + 1} - 1x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 8 - x^2 - x}{x + 1} = -1$$

כלומר $y = 1x - 1 = x - 1$ הוא אסימפטוטה משופעת ב ∞ . אין צורך

לבדוק ב $-\infty$, כי כיון שזוהי פונקציה רציונלית, מנת שני

פולינומים, הרי שאותה אסימפטוטה משופעת נכונה גם ב $+\infty$

וגם ב $-\infty$

דוגמא:

מצא את כל האסימפטוטות של $y=\sin(x)$.

כיון שתחום ההגדרה של הפונקציה הוא כל \mathbb{R} , אין אסימטוטה אנכית. עבור אסימטוטה משופעת נחשב ונקבל:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{x}, \frac{-1}{x} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{x}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0 = m, n = \lim_{x \rightarrow \infty} \sin(x) - 0x = \lim_{x \rightarrow \infty} \sin(x)$$

הגבול שמגדיר את n לא קיים, כי למשל הסדרה $x_k = k\pi$ מקיימת שהיא שואפת לאינסוף וסדרת $-y$ שלה היא 0 , ולעומתה הסדרה $y_k = (4k+1)\pi/2$ מקיימת שהיא שואפת לאינסוף וסדרת $-y$ שלה היא 1 . אותן תשובות מתקבלות כאשר x שואף ל $-\infty$ בכך קבלנו דוגמא לפונקציה חסרת אסימטוטות בכלל, וכך שבחשוב האסימטוטה המשופעת שלה, m קיים ומוגדר אבל n לא קיים.

דוגמא:

מצא את כל האסימפטוטות של $y=e^x$.

כיון שתחום ההגדרה של הפונקציה הוא כל \mathbb{R} , אין אסימטוטה אנכית. עבור אסימטוטה משופעת נחשב ונקבל:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{1} = \infty$$

משופעת ב ∞ . עבור $-\infty$, נקבל

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = \frac{0}{\infty} = 0, n = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - 0x = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

כלומר $y=0$ אסימטוטה משופעת (למעשה עם שפוע 0 ולכן אפקית) ב $-\infty$. כלומר קבלנו פונקציה (שאיננה פונקציה רציונלית) שיש לה אסימפטוטה משופעת במינוס אינסוף ואין לה אסימפטוטה משופעת באינסוף.

המשפטים של החשבון הדיפרנציאלי.

הגדרה: מקסימום מקומי, מינימום מקומי, קיצון מקומי.
נתונה פונקציה f , ומספרים b , ו $a > 0$ כך שהקטע $(b-a, b+a)$ הוא בתחום ההגדרה של f . נגיד כי ב- b יש מקסימום מקומי של f , אם ל f המצומצמת לקטע $(b-a, b+a)$ יש מקסימום בנקודה b .
נגיד כי יש לה מינימום מקומי אם ל f המצומצמת יש מינימום

ב b , נגיד כי יש קיצון מקומי ב- b אם יש לה מקסימום מקומי או מינימום מקומי. משפט פרמה. Fermat

נתונות פונקציה f ונקודות קיצון מקומי b ונתון כי $f'(b)$ מוגדרת. אז $f'(b)=0$.

הוכחה

נוכיח עבור מקסימום מקומי בלבד. ההוכחה למינימום מקומי דומה. נשתמש בהגדרת הנגזרת: מתקיים הגבול

$$f'(b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(b+h) - f(b)}{h} \text{ . והוא שווה לגבול מימין ומשמאל.}$$

נשתמש בגבול מימין. אז $h > 0$, ולפי תכונות המקסימום (עבור $0 < h < a$) מתקיים $f(b+h) \leq f(b)$, ולכן המונה בגבול מקיים

$$f(b+h) - f(b) \leq 0 \text{ , המכנה חיובי ולכן המנה } \frac{f(b+h) - f(b)}{h} \text{ היא}$$

קטנה או שווה ל-0, והגבול מימין קטן או שווה ל-0. הגבול משמאל הוא גבול של בטויים שבהם המונה קטן או שווה ל-0, המכנה שלילי, לכן המנה אי שלילית והגבול אי שלילי. אז הגבול, שהוא גבול מימין ומשמאל הוא גם גדול או שווה וגם קטן או שווה ל-0, ולכן הוא 0. ■

משפט רול Rolle

נתונה פונקציה f אשר מוגדרת בקטע $[a,b]$, רציפה בכל נקודות הקטע, וגזירה בכל נקודות הקטע הפתוח (a,b) , ונתון כי $f(a)=f(b)$. אז קימת לפחות נקודה אחת c , כך ש $a < c < b$ וכך ש $f'(c)=0$.

הערה. יכולות להיות שתי נקודות כאלו או שלוש. לא אומרים איך למצוא את c .

הוכחה

כיון ש- f רציפה בקטע סגור, אז לפי משפט וירשטרס יש נקודה c בקטע הסגור $[a,b]$ שבה מתקבל המקסימום של f על הקטע. אם c בקטע הפתוח, כלומר $c \neq a, c \neq b$, אז לפי ההגדרה c היא נקודת מקסימום מקומי ולכן לפי משפט פרמה נובע כי $f'(c)=0$, והוכחנו את הטענה. יש גם לפי משפט וירשטרס נקודה d שבה

ל- f יש את ערך המינימום בקטע. אם $d \neq a, d \neq b$ נובע כי d היא נקודת מינימום מקומי ושוב לפי משפט פרמה נובע כי $f'(d)=0$, והסתיימה ההוכחה.

נותר להוכיח את המשפט רק עבור המקרה שבו c, d הן בקצות הקטע. המקסימום והמינימום של f הם $f(a)$ ו $f(b)$. אבל נתון כי $f(a)=f(b)$, ולכן נובע כי f היא הפונקציה הקבועה. אבל אז $f'=0$ בכל נקודות הקטע $[a, b]$, וברור שהיא מקיימת את המשפט. ■

משפט ערך הביניים של לגרנז' Lagrange

נתונה פונקציה f אשר מוגדרת בקטע $[a, b]$, רציפה בכל נקודות הקטע, וגזירה בכל נקודות הקטע הפתוח (a, b) אז קימת לפחות נקודה אחת c , כך ש $a < c < b$ וכך ש $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. הערה. יכולות להיות שתי נקודות כאלו או שלוש. לא אומרים איך למצוא את c . כמו כן אם נציב את הנתון $f(b)=f(a)$, נקבל כי $f'(c)=0$, כלומר משפט לגרנז' הופך להיות המשפט של רול.

הוכחה

גם הוכחת משפט לגרנז' מסתמכת על המשפט של רול. אנו לוקחים את הנתון על f , ומנסים לשנות את המצב כדי לקבל נתונים כמו במשפט רול. נגדיר $k(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$. אז k היא פונקציה ממעלה ראשונה, ולכן הגרף שלה הוא קו ישר. על ידי הצבה רואים כי $k(a)=f(a), k(b)=f(b)$, כלומר הקו הישר שהוא הגרף של k , מתלכד עם הגרף של f בנקודות הקצה a, b . ברור כי k היא פונקציה רציפה בקטע $[a, b]$ וגזירה בכל נקודות הקטע הפתוח (a, b) . נגדיר כעת $h(x) = f(x) - k(x)$. אז h היא הפרש של שתי פונקציות רציפות בקטע הסגור ולכן גם היא כזו, והיא הפרש של שתי פונקציות גזירות בקטע הפתוח ולכן גם היא כזו, ולפי הבניה $h(a)=f(a)-k(a)=0$ $h(b)=f(b)-k(b)=0$, ולכן h מקיימת את תנאי משפט רול ולכן יש נקודה c אחת לפחות שבה מתקיים $h'(c)=0$. לפי ההגדרה $h' = f' - k' = f' - (f(b) - f(a))/(b - a)$, כלומר קיימת c אחת לפחות כך ש $f'(c) - (f(b) - f(a))/(b - a) = 0$. כדרוש. ■

קטעי עליה

נניח כי נתונים פונקציה f מוגדרת ורציפה בכל נקודות הקטע $[a,b]$, ולכל x , כך ש $a < x < b$ מוגדרת $f'(x)$ ומתקיים כי $f'(x) > 0$. אז $[a,b]$ קטע עליה של f .

הוכחה

תהינה נתונות נקודות p, q כך ש $a < p < q < b$, צ"ל כי $f(p) < f(q)$. נשים לב כי תנאי משפט לגרנג' קימים בקטע $[p,q]$, כי f רציפה בקטע הסגור וגזירה בפתוח. אז לפי מסקנת משפט לגרנג' קימת

c אחת לפחות כך ש $p < c < q$ וכך ש $f'(c) = \frac{f(q) - f(p)}{q - p}$. לפי

ההנחה $f'(c) > 0$, ולכן המנה $\frac{f(q) - f(p)}{q - p}$ היא חיובית. כיון

שהמכנה חיובי לפי הנתון, גם המונה חיובי כדרוש. ■

קטעי ירידה

נניח כי נתונים פונקציה f מוגדרת ורציפה בכל נקודות הקטע $[a,b]$, ולכל x , כך ש $a < x < b$ מוגדרת $f'(x)$ ומתקיים כי $f'(x) < 0$. אז $[a,b]$ קטע עליה של f .

ההוכחה דומה מאוד להוכחת הטענה הקודמת.

משפט ערך הביניים של קושי Cauchy

נתונים הקטע $[a,b]$, ופונקציות f, g , אשר מוגדרות ורציפות בכל נקודות הקטע, וגזירות בכל נקודות הקטע הפתוח (a,b) , וכך שלכל $x, a < x < b$ מתקיים $g'(x) > 0$. אז קימת לפחות נקודה

אחת c , כך ש $a < c < b$ וכך ש $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.

הערה. יכולות להיות שתי נקודות כאלו או שלוש. לא אומרים איך למצוא את c . כמו כן אם נציב את הנתון $g(x) = x$, נקבל כי

הופך להיות משפט ערך הביניים של לגרנג'י. כלומר משפט ערך הביניים של קושי, $g'(c)=1, g(b)=b, g(a)=a$

הוכחה

נכליל את הוכחת משפט ערך הביניים של לגרנג'י, נביט בפונקציה h אשר הוגדרה שם, וכל אות של משתנה או של קבוע נחליף בערך של g באותה נקודה. כלומר במקום

$$h(x) = f(x) - k(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a)$$

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)) - f(a)$$

לפי טענה קודמת נובע כי $g(b) > g(a)$ ולכן $g(b) - g(a) > 0$.

חבור חסור כפל או חלוק בקבוע משאירים פונקציה רציפה רציפה, ומשאירים פונקציה גזירה גזירה, ולכן

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)) + f(a)$$

וחלוקה בקבועים, ולכן היא פונקציה רציפה בקטע הסגור וגזירה בפתוח. גם f רציפה בקטע הסגור וגזירה בפתוח ולכן כיון שחסור פונקציות רציפות היא רציפה וחסור שתי פונקציות גזירות היא גזירה, נובע כי h היא פונקציה רציפה ב $[a, b]$

וגזירה ב (a, b) . כמו כן לפי הנתון $h(a) = h(b) = 0$, ולכן מתקיימים תנאי משפט רול, ולכן לפי מסקנת משפט רול קימת c אחת לפחות כך ש $a < c < b$ וכך ש $h'(c) = 0$. לפי הגדרת הנגזרת נובע כי $h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(c) = 0$ או על ידי העברת אגפים

$$\blacksquare \text{ כדרוש, } \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

כלל ליהופיטל עבור $0/0$ בנקודה סופית

נתונים קטע $[a, b]$ ופונקציות f, g אשר מוגדרות רציפות וגזירות בקטע (a, b) וכך שמתקיים $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{x \rightarrow b} g(x) = 0$ ו $g'(x) > 0$. אז

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

הוכחה

כיון שמתקיים $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{x \rightarrow b} g(x) = 0$, ניתן להרחיב את תחום

ההגדרה של f ושל g לקטע הסגור $[a, b]$ על ידי זה שנגדיר $f(b) = g(b) = 0$. אז מתקיים לפי משפט ערך הביניים של קושי

שיימת נקודה c אחת לפחות, $x < c < b$, כך שמתקיים השוויון

$$\text{ולכן } \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - 0}{g(x) - 0} = \frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$$\blacksquare \text{ כדרוש. } \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b, x < c < b} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{c \rightarrow b} \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

בשנת תשע"ד הספקנו את החומר הקודם
באינפי א ושעורי אינפי ב התחילו מכאן

אינטגרלים.

נביט על מושג הפונקציה. זהו תהליך אשר לכל x בתחום ההגדרה מתאים y בתמונה. נביט על תהליך חשוב הנגזרת. זהו תהליך אשר בו 'לכל' פונקציה (רק לפונקציות גזירות) מתאימה פונקציה חדשה שהיא הנגזרת שלה. זוהי פונקציה שהמשתנים שלה הם פונקציות. מכיון שלא רוצים להשתמש במושג פונקציה גם עבור הקלט, גם עבור הפלט וגם עבור התהליך, אז משתמשים במילה אופרטור, ואומרים כי אופרטור הגזירה מעביר את הונקציה f לפונקציה f' .

האם האופרטור הוא חח"ע? לא כי $(x^2 + 8)' = (x^2 + 5)' = 2x$, אבל אפשר להוכיח כי כמות הפונקציות שיש להן אותה נגזרת היא מוגבלת.

טענה

נתונה פונקציה רציפה וגזירה על הישר הממשי f ואשר מקיימת $f' = 0$. אז ישנו קבוע d כך ש $f \equiv d$.

הוכחה

נבחר a, b כלשהם בתחום ההגדרה, אז קימת c אחת לפחות כך ש $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$. לפי הנתון $f'(c) = 0$ ולכן המונה האחרון

הוא 0, כלומר לכל a, b מתקיים $f(a) = f(b)$ כלומר f קבועה. \blacksquare

טענה

נתונות שתי פונקציות גזירות על הישר f, g כך ש $f' = g'$. אז קיים קבוע d כך ש $g \equiv f + d$.

הוכחה.

נביט על $g - f$ המקיימת כי $(g - f)' = 0$, אז לפי הטענה הקודמת קיים קבוע d כך ש $g - f \equiv d$ או $g \equiv f + d$ ■

בלשון של אלגברה לינארית, אופרטור הגזירה היא העתקה לינארית, והגרעין שלה Ker הוא תת המרחב של כל הפונקציות הקבועות.

כיון שאופרטור הגזירה (כמעט) חד חד ערכי, יש לו אופרטור הפוך אשר נקרא אופרטור האינטגרל הבלתי מסוים (ולפעמים אופרטור הקדומה), המסומן על ידי האות S מסולסלת, ואשר מוגדר על ידי $[\int f(x) dx = g(x) + c] \leftrightarrow [(g)' = f]$. נשים לב כי האופרטור החדש מוגדר עד כדי תוספת קבוע, כיון שאכן אופרטור הגזירה איננו חח"ע. האותיות dx מבטאות בינתיים רק סימונים.

כיון שאופרטור האינטגרל הבלתי מסויים הוא הפוך (במובן מסוים) של אופרטור הגזירה, הרי שהרבה מחוקי הגזירה יוצרים חוקים של אינטגרל בלתי מסויים:

משפטי קיום

1. נתונה פונקציה f המוגדרת ורציפה על הקטע $[a, b]$. אז קיימת לה קדומה g באותו קטע. (בלי הוכחה)

הגדרה

נתונה פונקציה f המוגדרת על הקטע $[a, b]$. אז נגיד כי היא רציפה למקוטעין על הקטע, אם יש קטעים $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n]$ אשר אחודם הוא הקטע $[a, b]$, כך ש f רציפה על כל תת קטע, וכך שבין כל שני תתי קטעים ל- f יש נקודת אי רציפות מסוג קפיצה.

2. נתונה פונקציה f המוגדרת ורציפה למקוטעין על הקטע $[a,b]$. אז קימת לה קדומה g באותו קטע. (בלי הוכחה)

3. נתונה פונקציה f המוגדרת ומונוטונית (עולה או יורדת) על הקטע $[a,b]$. אז קימת לה קדומה g באותו קטע. (בלי הוכחה)

חוקי האינטגרל הבלתי מסוים :

$$1. \int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx, 2. \int cf(x) dx = c \int f(x) dx.$$

$$3. \int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx. 4. \int g'(f(x))f'(x) dx = g(f(x)) + c.$$

כאשר בכלל 2 c מסמן קבוע, כלל 3 נקרא אינטגרציה בחלקים, וכלל 4 נקרא כלל ההצבה.

אינטגרלים של פונקציות אלמנטריות

$$1. \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, a \neq -1, 2. \int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \frac{\log_a x}{\log_a e} + c = \ln a \log_a x + c, 2'. \int \frac{dx}{x} = \ln x + c.$$

$$3. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c = \log_a ea^x + c. 3'. \int e^x dx = e^x + c. 4. \int \sin x dx = -\cos x + c,$$

$$5. \int \cos x dx = \sin x + c, 6. \int \tan x dx = -|\ln(\cos x)| + c, 7. \int \cot x dx = |\ln(\sin)| + c,$$

$$8. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c = -\arccos x + c, 9. \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c = -\operatorname{arc cot} x + c,$$

אינטגרלים שפה קשה

לכל מכפלת/מנת פונקציות אלמנטריות יש נגזרת שהיא חבור חסור כפל וחלוק של הכופלים או האיברים במנה. לעומת זאת אין נוסחה טובה לאינטגרל של מכפלת/מנת פונקציות. בנוסף כל נגזרת של פונקציה אלמנטרית היא פונקציה אלמנטרית. לעומת זאת כל פונקציה אלמנטרית היא רציפה, ולכן יש לה קדומה, אבל הקדומה איננה בהכרח פונקציה אלמנטרית.

לדוגמא, פונקצית הפעמון של גאוס $e^{-\frac{x^2}{2}}$, הקדומה שלה יכלה לעזור לנו לחשב הסתברויות של התפלגות נורמלית, אך כיון

שהיא איננה אלמנטרית, נאלצים לחשב הסתברויות כאלה מתוך טבלאות או בעזרת חישוב נומרי.

דוגמאות לחשובי אינטגרלים
אינטגרל ימידי

$$\int (4\sqrt{x} + 7\sqrt[3]{x} - 5 \cdot 3^x - \frac{6}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{8}{1+x^2}) dx = 4 \int x^{\frac{1}{2}} dx + 7 \int x^{\frac{1}{3}} dx - 5 \int 3^x dx - 6 \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - 8 \int \frac{dx}{1+x^2} = 4 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 7 \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - 5 \frac{3^x}{\ln 3} + 6 \arccos x + 8 \arccot x + c = 8 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} + 21 \frac{x^{\frac{4}{3}}}{4} - 5 \frac{3^x}{\ln 3} + 6 \arccos x + 8 \arccot x + c$$

שיטת האינטגרציה בחלקים

נביט בדוגמא הבאה

$$\int x \cdot e^x dx = ?$$

$$\int e^x \cdot x dx = ?$$

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx =$$

כלומר, לא ברור איזו אופציה טובה יותר בנוסחא, האם $f'(x) = x, g(x) = e^x$ ובהתאמה האם $f(x) = e^x, g'(x) = x$. ננסה את שתי האפשרויות ונבדוק את הטובה יותר.

אפשרות א

$$f'(x) = x, g(x) = e^x \rightarrow f(x) = \frac{x^2}{2}, g'(x) = e^x \rightarrow \int x \cdot e^x dx = \frac{x^2}{2} e^x - \int \frac{x^2}{2} \cdot e^x dx.$$

אפשרות ב

$$f'(x) = e^x, g(x) = x \rightarrow f(x) = e^x, g'(x) = 1 \rightarrow \int e^x \cdot x dx = e^x x - \int e^x \cdot 1 dx.$$

ברור כי האופציה השנייה עדיפה כיון שהפולינום x הפך להיות הפולינום 1, ולכן אין לנו יותר מכפלה. לעומת זאת באופציה הראשונה, לאחר השמוש בנוסחא, עדין חיבים לחשב אינטגרל של מכפלה, ולכן נסיים את התרגיל בדרך השנייה:

$$f'(x) = e^x, g(x) = x \rightarrow f(x) = e^x, g'(x) = 1 \rightarrow \int e^x \cdot x dx = e^x x - \int e^x \cdot 1 dx,$$

$$\int e^x \cdot x dx = e^x x - \int e^x \cdot 1 dx = e^x x - e^x + c$$

עוד דוגמא

$$\int x^2 \cdot \sin x dx = -x^2 \cdot \cos x + 2 \int x \cdot \cos x dx = -x^2 \cdot \cos x + 2(x \sin x - \int \sin x dx) =$$

$$= -x^2 \cdot \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c.$$

עוד דוגמא

$$I = \int \cos x \cdot e^x dx = e^x \cos x - \int (-\sin x) \cdot e^x dx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int \cos x \cdot e^x dx. 2I = e^x \cos x + e^x \sin x,$$

$$\int \cos x \cdot e^x dx = 0.5(e^x \cos x + e^x \sin x) + c.$$

שיטת ההצבה

בנוסחה זו אי אפשר להתקדם בלי $\int g'(f(x))f'(x)dx = g(f(x)) + c$. שמזהים את f ואת f' ומצד שני ברגע שמזהים אותם נשאר לנו תרגיל אינטגרציה פשוט לחשב את g מתוך g' .

דוגמא

נביט בתרגיל $\int 2x\sqrt{1+x^2} dx$. אז רואים כי אם נציב $f(x) = 1+x^2$, אז ינבע כי $f'(x) = 2x, g'(x) = \sqrt{x}$ ולכן רק צריך לחשב את g , ואכן

$$\cdot g(x) = \frac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + c, g(f(x)) = \frac{2\sqrt{(1+x^2)^3}}{3} + c$$

צורת הכתיבה של לייבניץ

מסתבר כי צורת סימון האינטגרל של לייבניץ ממש נוחה לשמוש בשיטת ההצבה. נסמן $u = f(x) = 1+x^2$, וכמובן $u' = f' = 2x$, אבל לייבניץ מסמן נגזרת אחרת ונקבל

$$\frac{du}{dx} = 2x \rightarrow du = 2x dx, \int 2x\sqrt{1+x^2} dx = \int \sqrt{1+x^2} 2x dx = \int \sqrt{u} du = \frac{u^{3/2}}{3/2} + c =$$

$$\frac{2\sqrt{u^3}}{3} + c = \frac{2\sqrt{(1+x^2)^3}}{3} + c$$

עוד דוגמא

$$\int \frac{dx}{x \ln(x) \ln(\ln(x))} = ?, u = f(x) = \ln(\ln(x)), f'(x) = \frac{1}{x \ln(x)}, \int = \int \frac{dx}{x \ln(x) \ln(\ln(x))}, g'(u) = \frac{1}{u},$$

$$g(u) = \ln(u) + c, g(f(x)) = \ln(\ln(\ln(x))) + c.$$

אותה דוגמא בכתיבה של לייבניץ

$$\int \frac{dx}{x \ln(x) \ln(\ln(x))} = ?, u = f(x) = \ln(\ln(x)), du = \frac{dx}{x \ln(x)} \int \frac{dx}{x \ln(x) u} = \int \frac{du}{u} = \ln(u) + c = \ln(\ln(\ln(x))) + c$$

שברים אלגבריים

נביט למשל בתרגיל . $\int \frac{(2x^7 - x^6 - 2x^5 + x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 5)dx}{x^4 - 1} = ?$ עכשיו

רוצים ללמוד את הדרך לפתור כזה תרגיל. זהו אלגוריתם פשוט

אבל ארוך, שאמור לפתור כל אינטגרל מהצורה $\int \frac{p(x)dx}{q(x)} = ?$

כאשר $p(x), q(x)$ הם פולינומים ושאותו נציג כעת. האלגוריתם הוא אלגברי בלבד וניתן לעשות אותו גם אם ללא קשר לחשוב אינטגרלים כלל.

שלב א רק למקרה שבו $\deg(q(x)) \leq \deg(p(x))$

אם קורה ש $\deg(p(x)) < \deg(q(x))$, אז עוברים ישר לשלב ב. במקרה זה מתבצע חלוק פולינומים עם שארית שדומה (קצת יותר מסובד) לחלוקת מספרים שלמים.

דוגמא : 7/3. המספר הקטן או שווה ל 7 ואשר מתחלק ב 3 הוא 6. $2 = 6/3$. לכן תוצאת החלוק היא מנה 2, ושארית $7 - 6 = 1$.

ונשים כעת נביט על התרגיל $\frac{2x^7 - x^6 - 2x^5 + x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 5}{x^4 - 1}$

לב כי קשה לבצע את החלוק במקום זה נבצע את החלוק

וכעת נשתמש במנה (הזמנית) $2x^3$ כדי לכפול את $\frac{2x^7}{x^4} = 2x^3$

המכנה $2x^3(x^4 - 1) = 2x^7 - 2x^3$ ולחסר מהמונה. זהו סופו של שלב ראשון שאותו נכתוב בקצור

$$\begin{array}{r} 2x^3 \\ \hline 2x^7 - x^6 - 2x^5 + x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 5 \quad | \quad x^4 - 1 \\ \underline{2x^7 - 2x^3} \\ -x^6 - 2x^5 + x^4 + 4x^3 - x^2 - 2x + 5 \end{array}$$

וגם בדרך הבאה

$$\frac{2x^7 - x^6 - 2x^5 + x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 5}{x^4 - 1} = 2x^3 + \frac{-x^6 - 2x^5 + x^4 + 4x^3 - x^2 - 2x + 5}{x^4 - 1}$$

ואשר בסופו עוברים לתרגיל חדש שבו דרגת המונה היא 6 או

פחות, כעת נבצע את החלוקה $\frac{-x^6}{x^4} = -x^2$ נכפול ונחסר ובסופו של השלב השני דרגת המונה תרד להיות 5 או פחות.

$$\begin{array}{r} 2x^3 - x^2 \\ \hline 2x^7 - x^6 - 2x^5 + x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 5 \\ 2x^7 - 2x^3 \\ \hline -x^6 - 2x^5 + x^4 + 4x^3 - x^2 - 2x + 5 \\ -x^6 + x^2 \\ \hline -2x^5 + x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 2x + 5 \end{array} \quad x^4 - 1$$

את השלבים הבאים נבצע יותר מהר ונקבל

$$\begin{array}{r} 2x^3 - x^2 - 2x + 1 \\ \hline 2x^7 - x^6 - 2x^5 + x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 5 \\ 2x^7 - 2x^3 \\ \hline -x^6 - 2x^5 + x^4 + 4x^3 - x^2 - 2x + 5 \\ -x^6 + x^2 \\ \hline -2x^5 + x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 2x + 5 \\ -2x^5 + 2x \\ \hline x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 4x + 5 \\ x^4 - 1 \\ \hline 4x^3 - 2x^2 - 4x + 6 \end{array} \quad x^4 - 1$$

או בצורה אחרת.

$$\frac{2x^7 - x^6 - 2x^5 + x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 5}{x^4 - 1} = 2x^3 - x^2 - 2x + 1 + \frac{4x^3 - 2x^2 - 4x + 6}{x^4 - 1}$$

נסכם את שלב א, שלב חלוקת הפולינומים, באותיות

$$\text{כאשר במקרה הפרטי שלנו } \frac{p(x)}{q(x)} = m(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

$m(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 1, r(x) = 4x^3 - 2x^2 - 4x + 6$ ותמיד מתקיים בסוף

שלב א כי $\deg(r(x)) < \deg(q(x))$. אם במקרה מתקיים מראש

כי $\deg(p(x)) < \deg(r(x))$, אז אפשר להתייחס לשלב א כאילו

$$r(x) = p(x), m(x) = 0$$

שלב ב-פרוק המכנה לגורמים בלתי פריקים.

שלב זה יהיה בתרגילים שלנו קל ביותר, אבל מבחינה מתמטית אמיתית הוא קשה ביותר, כלומר זוהי בעיה שאין לה אלגוריתם אלגברי (שאיננו נומרי) סופי שמתאים לכל המקרים. כמובן שאנחנו נדאג לתת תרגילים שבהם התהליך יהיה קל ביותר.

במקרה הפרטי שלנו $x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$. כל אחד מהפולינומים שקבלנו בלתי ניתן לפרוק. באותיות נכתוב $q(x) = b_1^{s_1}(x)b_2^{s_2}(x)\cdots b_t^{s_t}(x)$ כאשר כל אחד מהפולינומים מימין הוא בלתי פריק.

פריקות מעל השדה.

כל הפולינומים הם בחוג הפולינומים $\mathbb{R}[x]$, כלומר המקדמים של הפולינומים הם בשדה \mathbb{R} . אם היינו עובדים בשדה המרוכבים, שהוא עשיר יותר (קבוצה יותר גדולה של איברים), היינו יכולים להמשיך את הפרוק:

$$x^4 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x - i)(x + i).$$

אנחנו נמשיך לעבוד מעל הממשיים.

משפט (בלי הוכחה) בחוג $\mathbb{R}[x]$, הפולינומים הבלתי פריקים היחידים הם ממעלה אחת, או ממעלה שניה שהם חסרי שרשים ממשיים.

שלב ג- הצגה כסכום של שברים חלקיים

נביט על השבר $\frac{r(x)}{q(x)} = \frac{r(x)}{b_1^{s_1}(x)b_2^{s_2}(x)\cdots b_t^{s_t}(x)}$, ונציג אותו כסכום של

$$\frac{r(x)}{q(x)} = \frac{r(x)}{b_1^{s_1}(x)b_2^{s_2}(x)\cdots b_t^{s_t}(x)} = \frac{m_{1,1}(x)}{b_1(x)} + \frac{m_{1,2}(x)}{b_1^2(x)} + \cdots + \frac{m_{1,s_1}(x)}{b_1^{s_1}(x)} +$$

שברים

$$+ \frac{m_{2,1}(x)}{b_2(x)} + \frac{m_{2,2}(x)}{b_2^2(x)} + \cdots + \frac{m_{2,s_2}(x)}{b_2^{s_2}(x)} + \cdots$$

בעלי מכנים שהם חזקות של פולינומים בלתי פריקים, כאשר כל אחד מהמונים מקיים כי דרגתו קטנה ממש מדרגת המכנה המתאים במעלה ראשונה.

כיון שהמלל לא מסביר מספיק את הענין, נמשיך פשוט את

הדוגמא:
$$\frac{4x^3 - 2x^2 - 4x + 6}{x^4 - 1} = \frac{4x^3 - 2x^2 - 4x + 6}{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)}$$

במקרה זה $r_1(x) = x-1, r_2(x) = x+1, r_3(x) = x^2+1, s_1 = s_2 = s_3 = 1$.

ולכן נקבל כי $\frac{4x^3-2x^2-4x+6}{x^4-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{c}{x+1} + \frac{dx+k}{x^2+1}$, כאשר דרגות 2 מהמונים הן 0, כלומר דרגת המכנה פחות אחד, ודרגת אחד המונים היא 1, כלומר דרגת המכנה פחות אחד.

לדוגמא, נניח כי השארית היא מהצורה $\frac{4x^3-2x^2-4x+6}{(x-1)^3(x+1)^4(x^2+1)^2}$

אז נקבל פרוק $\frac{4x^3-2x^2-4x+6}{(x-1)^3(x+1)^4(x^2+1)^2} = \frac{ax+c}{x^2+1} + \frac{dx+k}{(x^2+1)^2} + \frac{l}{x-1} + \frac{j}{(x-1)^2} + \frac{n}{(x-1)^3} + \frac{u}{x+1} + \frac{v}{(x+1)^2} + \frac{w}{(x+1)^3} + \frac{z}{(x+1)^4}$
 וכעת נשאלת השאלה איך מוצאים את המקדמים?

שלב ד-מציאת המונים

פשוט כופלים במכנה המשותף ומשוים אגפים. נמשיך את התרגיל המקורי.

$$\frac{4x^3-2x^2-4x+6}{x^4-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{c}{x+1} + \frac{dx+k}{x^2+1} \rightarrow a(x+1)(x^2+1) + c(x-1)(x^2+1) + (dx+k)(x-1)(x+1) = 4x^3 - 2x^2 - 4x + 6$$

אם למשל נציב $x=1$ בשויון האחרון נקבל

$$a \cdot 2 \cdot 2 + c \cdot 0 + (dx+k)0(x+1) = 4 - 2 - 4 + 6 \rightarrow 4a = 4$$

$a=1$. אם נציב $x=-1$ נקבל

$$a0(x^2+1) + c \cdot (-2) \cdot 2 + (dx+k)(x-1)0 = -4 - 2 + 4 + 6 \rightarrow -4c = 4$$

$c=-1$. אם נציב $x=0$ נקבל כי $a \cdot 1 \cdot 1 + c \cdot (-1) \cdot 1 + k(-1)1 = 6$ ולכן

נובע כי $a-c-k=6$ ולכן $k=-4$. כעת נפתח בשויון הזהות

האחרון את הבטויים בעלי חזקה שלישית בדיוק ונקבל, ולכן

נקבל $x^3(a+c+d) = 4x^3$, כלומר נקבל כי $d=4$, ולכן נקבל סופסוף

$$\frac{4x^3-2x^2-4x+6}{x^4-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{4x-4}{x^2+1}$$

את השויון ואכן נבדק

ונקבל כי

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{4x-4}{x^2+1} = \frac{(x+1)(x^2+1) - (x-1)(x^2+1) + 4(x-1)(x^2-1)}{x^4-1} =$$

$$= \frac{2(x^2+1) + 4(x^3 - x^2 - x + 1)}{x^4-1} = \frac{4x^3 - 2x^2 - 4x + 6}{x^4-1}$$

כדרוש.

ולכן סימנו עם הפרוק האלגברי :

$$\frac{2x^7 - x^6 - 2x^5 + x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 5}{x^4 - 1} = 2x^3 - x^2 - 2x + 1 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{4x-4}{x^2+1}$$

שלב ה-האינטגרציה

נסיים עם התרגיל שלנו ואח"כ נחשוב מה נעשה בתרגילים דומים.

$$\int \left(\frac{2x^7 - x^6 - 2x^5 + x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 5}{x^4 - 1} \right) dx = \int \left(2x^3 - x^2 - 2x + 1 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{4x-4}{x^2+1} \right) dx =$$

$$= \frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} - x^2 + x + \ln|x-1| - \ln|x+1| + 2 \int \frac{2xdx}{x^2+1} - 4 \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} - x^2 + x + \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| +$$

$$2 \ln(x^2+1) - 4 \arctan(x) + c = \frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} - x^2 + x + \ln \left| \frac{x-1}{x+1} (x^2+1)^2 \right| + 4 \arctan x + c$$

ובמקרה הכללי $\frac{p(x)}{q(x)} = m(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$

אז קל לאנטגרל את $m(x)$ שהוא פולינום. את השבר $\frac{r(x)}{q(x)}$

מפרקים לסכום של שברים חלקיים כאשר המכנים הם חזקות של פולינומים בלתי פריקים מעל \mathbb{R} . פולינום ב"פ מעל \mathbb{R} הוא ממעלה ראשונה או שניה. אם הוא מעלה ראשונה, אז נקבל

$\int \frac{a}{(x+b)^s} dx$, ואז ידוע כי האינטגרל הוא $a \ln|x+b|$. עבור המקרה

$s=1$ והוא $\frac{a}{(1-s)(x+b)^{s-1}}$ עבור המקרה $1 < s$. אם הגורם הבי"פ

הוא ממעלה שניה הוא $\int \frac{d}{(ax^2+bx+c)^s} dx$ מהצורה ומתקיים כי

$\Delta = b^2 - 4ac < 0$, אחרת הפולינום פריק. אז גם מתקיים כי

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right) \right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{(4ac - b^2)}{4a^2} \right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \right)^2 \right]$$

ולכן,

$$\int \frac{d}{(ax^2 + bx + c)^s} dx = \int \frac{d}{a[(x + \frac{b}{2a})^2 + (\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a})^2]^s} dx = \frac{d}{a^s} \int \frac{dx}{[(x + \frac{b}{2a})^2 + (\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a})^2]^s}$$

נבצע החלפת משתנים $u = x + (b/2a), du = dx, p = \sqrt{(-\Delta)}/2a$

נקבל את האינטגרל $\frac{d}{a^s} \int \frac{du}{[u^2 + p^2]^s}$ שאותו כבר נוכל לחשב

לפחות במקרה $s=1$, ואז הוא שווה ל

$$\frac{d}{a^s} \frac{1}{p} \arctan\left(\frac{u}{p}\right) + c = \frac{d}{pa^s} \arctan\left(\frac{u}{p}\right) + c$$

יותר קשה לחשוב, ונדגים את החשוב למקרה $s=2$ בלבד.

נביט על האינטגרל הבא $\int \frac{du}{u^2 + p^2}$ ונחשב אותו בשתי דרכים, גם

מידית, וגם בחלקים: התשובה המידית היא כמובן

, אבל בנוסף נחשב אותו גם בחלקים ונקבל עבור

ההצבה

$$\begin{aligned} f' &= 1, g = \frac{1}{u^2 + p^2}, f = u, g' = \frac{-2u}{(u^2 + p^2)^2}, \int \frac{du}{u^2 + p^2} = \frac{u}{u^2 + p^2} + \int \frac{2u^2 du}{(u^2 + p^2)^2} = \\ &= \frac{u}{u^2 + p^2} + \int \frac{2(u^2 + p^2 - p^2) du}{(u^2 + p^2)^2} = \frac{u}{u^2 + p^2} + \int \frac{2(u^2 + p^2) du}{(u^2 + p^2)^2} - 2 \int \frac{p^2 du}{(u^2 + p^2)^2} = \\ &= \frac{u}{u^2 + p^2} + \frac{2}{p} \arctan\left(\frac{u}{p}\right) - 2p^2 \int \frac{du}{(u^2 + p^2)^2}. \end{aligned}$$

, ולכן נשווה בין התשובות השונות ונקבל.

$$\frac{u}{u^2 + p^2} + \frac{2}{p} \arctan\left(\frac{u}{p}\right) - 2p^2 \int \frac{du}{(u^2 + p^2)^2} = \frac{1}{p} \arctan\left(\frac{u}{p}\right) + c \rightarrow$$

$$2p^2 \int \frac{du}{(u^2 + p^2)^2} = \frac{u}{u^2 + p^2} + \frac{2}{p} \arctan\left(\frac{u}{p}\right) + c \rightarrow$$

$$\int \frac{du}{(u^2 + p^2)^2} = \frac{u}{2p^2(u^2 + p^2)} + \frac{1}{p^3} \arctan\left(\frac{u}{p}\right) + c$$

בדרך דומה אפשר לחשב את שאר המקרים של s .

פולינום בשני משתנים.

פונקציה

$$f(x, y) = a_0 + a_{1,0}x + a_{0,1}y + a_{2,0}x^2 + a_{1,1}xy + a_{0,2}y^2 + a_{3,0}x^3 + a_{2,1}x^2y + a_{1,2}xy^2 + a_{0,3}y^3 + \dots$$

תקרא פולינום בשני משתנים

פונקציה רציונלית בשני משתנים היא מנה של שני פולינומים

$$\frac{2z^2y - y^3}{z + 2y} : \text{ בשני משתנים דוגמא}$$

פונקציה רציונלית טריגונומטרית היא פונקציה רציונלית בשני משתנים כאשר במקום אחד המשתנים מציבים $\sin(x)$ ובמקום המשתנה האחר מציבים $\cos(x)$. לדוגמא, נביט בפונקציה

$$\frac{2 \sin^2(x) \cos(x) - \cos^3(x)}{\sin(x) + 2 \cos(x)}$$

הצבה עבור אינטגרלים של פונקציות רציונליות טריגונומטריות.

נתונה פונקציה רציונלית טריגונומטרית. ההצבה הבאה היא הצבה קבועה, וכאשר היא נעשית האינטגרל של הפונקציה הרציונלית הטריגונומטרית הופך להיות אינטגרל של פונקציה רציונלית רגילה, ושאותו פותרים כמו שכבר למדנו.

נעיר שיש מקרים פרטיים שבהם יש הצבות שהן יותר מוצלחות (יותר קלות), כלומר שהן עדיפות על ההצבה שנלמד כעת. יתרונה של ההצבה שהיא מתאימה לכל פונקציה רציונלית טריגונומטרית, וחסרונה שבגלל כלליותה היא ארוכה יותר מהצבות פרטיות שמתאימות למקרים פרטיים.

ההצבה היא $t = \tan(x/2)$ או מה ששקול $x = 2 \arctan(t)$.

נמשיך עם הצבה זו ונבטא את $\sin(x), \cos(x), dx$ במשתנה החדש x .

נקבל

$$\begin{aligned} 1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) &= \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} \rightarrow \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{1 + t^2} \rightarrow \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - \frac{1}{1 + t^2} = \\ &= \frac{1 + t^2}{1 + t^2} - \frac{1}{1 + t^2} = \frac{t^2}{1 + t^2} \rightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}} \rightarrow \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}} \rightarrow \sin(x) = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \\ &= 2 \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}} = \frac{2t}{1 + t^2}, \cos(x) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{1 + t^2} - \frac{t^2}{1 + t^2} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1 + t^2} \\ &\rightarrow dx = \frac{2dt}{1 + t^2}. \end{aligned}$$

דוגמא:

חשב את $\int \frac{dx}{3 + \sin(x) + \cos(x)}$

תשובה

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{3 + \sin(x) + \cos(x)} &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{3(1+t^2) + 2t + 1 - t^2} = \int \frac{2dt}{4 + 2t + 2t^2} = \\ &= \int \frac{dt}{t^2 + t + 2} = \int \frac{dt}{(t + \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}} = \int \frac{dt}{(t + \frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{7}}{2})^2} = \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{t + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}}\right) + c = \\ &= \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{7}}\right) + c = \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{2 \tan(\frac{x}{2}) + 1}{\sqrt{7}}\right) + c\end{aligned}$$

דוגמא לאי יחידות האינטגרל

אני מודה לקרן סורקין על השאלה

$$\int \frac{dx}{\cos(x)} \quad \text{נחשב את}$$

פתרון א על ידי ההצבה $t = \tan(\frac{x}{2})$

נובע כי $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ ולכן

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\cos(x)} &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{1-t^2} = \int \frac{2dt}{(1-t)(1+t)} = \int \left[\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right] dt = \ln(1+t) - \ln(1-t) + c = \\ &= \ln \frac{1+t}{1-t} + c = \ln \frac{1 + \tan(\frac{x}{2})}{1 - \tan(\frac{x}{2})} + c\end{aligned}$$

פתרון ב על ידי ההצבה $t = \sin(x)$

נובע כי $dt = \cos(x)dx, dx = \frac{dt}{\cos(x)}$ ולכן

$$\int \frac{dt / \cos(x)}{\cos(x)} = \int \frac{dt}{\cos^2(x)} = \int \frac{dt}{1-t^2} = \int \frac{dt}{(1-t)(1+t)} = \frac{1}{2} \int \left[\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right] dt =$$

$$= \frac{1}{2} (\ln(1+t) - \ln(1-t)) + c = \frac{1}{2} \ln \frac{1+t}{1-t} + c = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)} + c$$

ולכאורה קבלנו שתי תשובות שונות, אבל מסתבר שהתשובות

שקבלנו זהות. נשתמש בזהות $\sin(x) = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ ונקבל

$$\text{נשתמש בזהות } \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{1-2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\text{ונקבל } \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1$$

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)} = \frac{1}{2} \ln \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{[\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)]^2}{[\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)]^2} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right)^2 = \ln \left(\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right) =$$

$$= \ln \left(\frac{\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}}{\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}} \right) = \ln \left(\frac{1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan\left(\frac{x}{2}\right)} \right)$$

כדרוש

שמושי האינטגרל

חשוב שטחים.

נתונה פונקציה f רציפה וחיובית בקטע $[a, b]$. נביט בשטח אשר מוגבל על ידי ארבעה קווים. הגרף $y=f(x)$ מעל, ציר ה- x מתחת, והקווים $x=a, x=b$ מימין ומשמאל. נניח כי G היא קדומה (אינטגרל) של f . כמות השטח הכלואה בצורה היא $G(b)-G(a)$.

הפסקה הקודמת קרויה המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והוכח גם על ידי ניוטון וגם על ידי לייבניץ.

סימון: נסמן את $G(b)-G(a)$ על ידי $\int_a^b f(x)dx$, ונקרא לו

האינטגרל המסוים של f בין a ובין b .

התשובה אינה תלויה בקדומה. נניח כי גם H היא קדומה של f , אז $H'=G'=f$, אז קיים קבוע c כך שמתקיים $H=G+c$, אז מתקיים $H(b)-H(a)=(G(b)+c)-(G(a)+c)=G(b)-G(a)$.

מציאת שטחים מסובכים יותר. נניח כי נתונות שתי פונקציות f, g רציפות, ורוצים למצוא את השטח הכלוא בין f ו- g , אז נפתר את המשוואה $f(x)=g(x)$, ובין כל שתי נקודות חתוך סמוכות נחשב את השטח מתחת הפונקציה הגדולה פחות השטח מתחת הפונקציה הקטנה.

דוגמא

חשב את השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות

$$\begin{aligned} f(x) &= 24x^3 + 96x^2 + 48x + 5, g(x) = 12x^3 + 72x^2 + 84x + 5, f(x) - g(x) = 12x^3 + 24x^2 - 36x = \\ &= 12x(x+3)(x-1), S = \int_{-3}^0 (12x^3 + 24x^2 - 36x)dx - \int_0^1 (12x^3 + 24x^2 - 36x)dx, F = 3x^4 + 8x^3 - 18x^2, \\ S &= F(0) - F(-3) - (F(1) - F(0)) = 2F(0) - F(1) - F(-3) = -((3+8-18) + (243-216-486)) = \\ &= 7 + 459 = 466 \end{aligned}$$

מציאת נפח גוף סבוב סביב ציר x

נתונה פונקציה f רציפה בקטע $[a, b]$, ונסובב את הגרף שלה סביב ציר x . נקבל גוף סבוב. אז כמות הנפח בגוף הסבוב היא

$$\pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

דוגמא

נתון חרוט שגבהו h ושמחוג בסיסו r . מהו הנפח שהוא כולא?

נביט על הפונקציה $f(x) = (Rx)/h$ המוגדרת בקטע $[0, h]$. הגרף הוא קטע מקו ישר שקצותיו בנקודות $(0, 0)$, (h, R) . אם נסובב את הגרף סביב ציר x , נקבל חרוט שוכב על צירו, שבסיסו בעל מחוג R , וגבהו לאורך ציר x הוא h . לכן כמות הנפח היא האינטגרל של $f(x)^2$ ונקבל

$$f(x) = \frac{Rx}{h}, 0 \leq x \leq h, V = \pi \int_0^h \left(\frac{Rx}{h}\right)^2 dx = \frac{\pi R^2 x^3}{3h^2} \Big|_0^h = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

מציאת נפח גוף סבוב סביב ציר y .

נתונה פונקציה f רציפה בקטע $[a, b]$, ונסובב את הגרף שלה סביב ציר y . נקבל גוף סבוב. אז כמות הנפח בגוף הסבוב היא

$$2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

דוגמא

נתון חרוט שגבהו h ושמחוג בסיסו r . מהו הנפח שהוא כולא? חשב הפעם על ידי בסוב סביב ציר y .

הפעם נביט בפונקציה $f(x) = h - (hx)/r$ בקטע $[0, r]$. שוב הגרף הוא קטע של קו ישר שקצותיו הם $(0, h)$, $(r, 0)$. נסובב את הגרף סביב ציר y ונקבל

$$f(x) = h - \frac{hx}{R}, 0 \leq x \leq R, V = 2\pi \int_0^R x \left(h - \frac{hx}{R}\right) dx = 2\pi h \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3R}\right) \Big|_0^R = 2\pi R^2 h \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

עוד דוגמא: מצא נפח כדור שמחוגו R .

נביט בעקום $x^2 + y^2 = R^2$, שהגרף שלו הוא מעגל בעל מחוג R ומרכזו ראשית הצירים. נעבור לפונקציה $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ בקטע $[-R, R]$, בעלת גרף שהוא החצי העליון של המעגל הקודם. אז הכדור הוא גוף הסבוב סביב ציר x של הפונקציה ונקבל את הנפח:

$$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}, -R \leq x \leq R, V = \pi \int_{-R}^R (\sqrt{R^2 - x^2})^2 dx = \pi \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx =$$

$$= \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-R}^R = \pi \frac{R^3(2+2)}{3} = \frac{4\pi R^3}{3}$$

עוד דוגמא

חשב את אותו נפח על ידי סבוב סביב ציר y .

נביט בפונקציה $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ בקטע $[0, R]$, בעלת גרף שהוא החצי הימני של חצי המעגל הקודם. נסובב סביב ציר x ונקבל חצי כדור ונפחו הוא:

$$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}, 0 \leq x \leq R, V = 2\pi \int_0^R x \sqrt{R^2 - x^2} dx, u = R^2 - x^2, du = -2x dx, x dx = \frac{-du}{2},$$

$$V = -2\pi \int_{R^2}^0 \frac{\sqrt{u}}{2} du = \pi \left(\frac{u^{1.5}}{1.5} \right) \Big|_0^{R^2} = \frac{\pi R^3 2}{3} = \frac{2\pi R^3}{3}$$

מציאת אורך עקום

נתונה פונקציה f רציפה בקטע $[a, b]$, אז אורך העקום הוא

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

דוגמא

חשב את אורך העקום $f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ בקטע $[0, \ln 2]$

תשובה

$$f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, (f')^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4}, (f')^2 + 1 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4},$$

$$\sqrt{1+(f')^2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, l = \int_0^{\ln 2} \sqrt{1+(f')^2} dx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Big|_0^{\ln 2} = \frac{2-0.5}{2} - \frac{1-1}{2} = \frac{3}{4}.$$

B.Riemann סכומי רימן

המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי מוכח על ידי שימוש בסכומי רימן. נתון שטח אשר מוגבל על ידי 4 קווים. $y=0$ (ציר x) מתחתיו, $x=a$ משמאלו, $x=b$ מימינו והגרף של הפונקציה החיובית $y=f(x)$ מעליו. נחלק את השטח על ידי קווים אנכיים לתתי שטחים, ונניח כי כל תת שטח הוא 'מלבן'. נסכם את שטחי המלבנים ונקבל את מה שמוגדר כ-סכום רימן.

כאשר נשאיף את מספר תתי המלבנים לאינסוף (כלומר מספר החלוקות יגדל), אז (עבור פונקציות רציפות, מונוטוניות רציפות למקוטעין) רימן הוכיח כי סכומי רימן שואפים לשטח האמיתי.

דוגמא

בצע את סכומי רימן עבור הפונקציה $f(x)=x^2$ בקטע $[a,b]$ כאשר נניח כי הרחבים של המלבנים שווים, וכי גבהו של כל 'מלבן' הוא ערך הפונקציה בנקודה השמאלית שלה.

תשובה

נניח כי יש n תתי מלבנים שוי בסיסים. אז נגדיר $h=(b-a)/n$. המלבן הראשון הוא בין הנקודות a ו- $a+h$, רחבו הוא h , וגבהו הוא a^2 , ולכן השטח הראשון הוא ha^2 . המלבן השני רחבו h וגבהו $(a+h)^2$, השלישי רחבו h וגבהו $(a+2h)^2$, ולכן סכום רימן, שהוא סכום שטחי המלבנים הוא:

$$h \sum_{i=0}^{n-1} (a+ih)^2 = h \left(\sum_{i=0}^{n-1} a^2 + 2ah \sum_{i=0}^{n-1} i + h^2 \sum_{i=0}^{n-1} i^2 \right) = h \left(na^2 + 2ah \frac{n(n-1)}{2} + h^2 \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \right) =$$

$$\frac{b-a}{n} na^2 + 2a \left(\frac{b-a}{n} \right)^2 \frac{n(n-1)}{2} + \left(\frac{b-a}{n} \right)^3 \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} =$$

$$= (b-a)a^2 + a(b-a)^2 \frac{n-1}{n} + (b-a)^3 \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$$

המשך דוגמא

חשב את גבול סכומי רימן שלמעלה כאשר n שואף לאינסוף.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} [(b-a)a^2 + a(b-a)^2 \frac{n-1}{n} + (b-a)^3 \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}] &= (b-a)a^2 + a(b-a)^2 + (b-a)^3 \frac{2}{6} = \\ &= \frac{(b-a)}{3} [3a^2 + 3a(b-a) + (b-a)^2] = \frac{(b-a)}{3} (3ab + a^2 + b^2 - 2ab) = \frac{(b-a)}{3} (a^2 + b^2 + ab) = \\ &= \frac{b^3 - a^3}{3} = \int_a^b x^2 dx \end{aligned}$$

כלומר הגבול של סכומי רימן כאשר n שואף לאינסוף הוא אכן האינטגרל, ובאמת סכומי רימן מתכנסים לאינטגרל.

חלוקה של קטע.

נתון קטע $[a, b]$. נבחר חלוקה של הקטע לתת קטעים $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$ נגדיר את הערך המוחלט של החלוקה Δ על ידי $|\Delta| = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}\}$. כלומר זהו אורך תת הקטע הגדול ביותר בחלוקה.

הגדרת סכום רימן

נניח כי בקטע $[a, b]$ מוגדרת פונקציה f , חלוקה Δ וכי בחרנו נקודות ביניים $x_{i-1} \leq c_i \leq x_i, \forall i, 1 \leq i \leq n$. נגדיר את סכום רימן התלוי בכל הנתונים, $SR(f, \Delta, c_i, 1 \leq i \leq n)$, על ידי:

$$SR = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(c_i)$$

שאנחנו עוברים על פני כל תתי הקטעים של Δ , ובכל תת קטע מחשבים שטח של מלבן שרחבו $x_i - x_{i-1}$ ושגבהו $f(c_i)$ בתקוה ששטח המלבן הזה מקרב את השטח שמתחת לגרף באותו תת קטע.

אינטגרליות רימן

נתון מספר סופי I . נגיד כי f אינטגרלית רימן בקטע $[a, b]$ אם $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \Delta, |\Delta| < \delta, \forall c_i, 1 \leq i \leq n \rightarrow |SR - I| < \varepsilon$. קרוי ערך I האינטגרל.

המשמעות הגאומטרית היא שבהנתן $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל חלוקה Δ המקיימת $|\Delta| < \delta$, ולכל בחירת נקודות ביניים c_i , מתקיים כי הערך המוחלט של המרחק בין SR ו-I קטן מ ε

טענה

נניח כי f כמקודם אינטגרבילית רימן. אז f חיבת להיות חסומה בקטע $[a, b]$.

הוכחה

נניח כי f אינטגרבילית רימן עם אינטגרל I , נבחר $\varepsilon = 1$, ועבורו יש $\delta > 0$. נניח כי f איננה חסומה ב $[a, b]$. נבחר ונקבע חלוקה Δ המקיימת $|\Delta| < \delta$. אם f היתה חסומה על כל תת קטע של Δ אז היה נובע כי f חסומה על כל $[a, b]$. לכן יש תת קטע אחד לפחות שבו f איננה חסומה. נסמן תת קטע זה על ידי $[x_{j-1}, x_j]$ בנוסף נבחר נקודות ביניים $c_i, 1 \leq i \leq n$. נקבל $|SR - I| < 1$ בנוסף מתקיים

$$\begin{aligned} SR - I &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})f(c_i) - I = (x_j - x_{j-1})f(c_j) + \sum_{i=1, i \neq j}^n (x_i - x_{i-1})f(c_i) - I \\ &= (x_j - x_{j-1})f(c_j) - \left(\sum_{i=1, i \neq j}^n (-1)(x_i - x_{i-1})f(c_i) + I \right). \end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned} |(x_j - x_{j-1})f(c_j)| - \left| \left(\sum_{i=1, i \neq j}^n (-1)(x_i - x_{i-1})f(c_i) + I \right) \right| &\leq |(x_j - x_{j-1})f(c_j) - \left(\sum_{i=1, i \neq j}^n (-1)(x_i - x_{i-1})f(c_i) + I \right)| \\ = |SR - I| < 1 &\rightarrow (x_j - x_{j-1})|f(c_j)| < 1 + \left| \sum_{i=1, i \neq j}^n (-1)(x_i - x_{i-1})f(c_i) + I \right| \\ |f(c_j)| < \frac{1 + \left| \sum_{i=1, i \neq j}^n (-1)(x_i - x_{i-1})f(c_i) + I \right|}{x_j - x_{j-1}} \end{aligned}$$

נקבע את $c_i, i \neq j$ ולכן אגף ימין באי השוויון האחרון קבוע, ואי השוויון מתקיים לכל $c_j \in [x_{j-1}, x_j]$ כלומר f חסומה על $[x_{j-1}, x_j]$, בסתירה להנחה שאיננה חסומה. לכן f חיבת להיות חסומה על $[a, b]$.

מסקנה

כיון ש f חסומה על $[a,b]$, אז לכל חלוקה Δ ולכל קטע $[x_{i-1}, x_i]$ קיימים

$$\cdot \text{Sup}(f(x)), x \in [x_{i-1}, x_i] \text{ ו } \text{Inf}(f(x)), x \in [x_{i-1}, x_i]$$

סכומי דרבו Darboux

נניח כי נתונה f חסומה בקטע $[a,b]$, וחלוקה Δ שלו. נגדיר את סכומי דרבו העליון והתחתון על ידי:

$$\overline{SD} = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \text{Sup}(f(x)), x \in [x_{i-1}, x_i]$$

$$\underline{SD} = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \text{Inf}(f(x)), x \in [x_{i-1}, x_i]$$

נשים לב כי סכומי דרבו תלויים רק ב- f וב Δ , אך לא בבחירת נקודות הביניים $c_i, 1 \leq i \leq n$. כל בחירה של $c_i, 1 \leq i \leq n$ התלויים בקטע תיצור אי שוויון $\underline{SD} \leq SR \leq \overline{SD}$

יחס העדינות בין חלוקות

נתונות שתי חלוקות Δ, Γ . נגיד כי Δ מעדנת את Γ , אם קימת הכלה של קבוצות $\Gamma \subseteq \Delta$, כלומר Δ מכילה את כל הנקודות של Γ ואולי אפילו יותר נקודות. ראינו בדוגמא והבנו באינטואיציה כי ככל שהחלוקה עדינה יותר מתקיים כי סכומי דרבו קרובים יותר לערך האינטימי של האינטגרל.

טענה

נתונות חלוקות $\Gamma \subseteq \Delta$ של הקטע $[a,b]$ ופונקציה חסומה המוגדרת על $[a,b]$. אז מתקיימים אי השוויונים $\overline{SD}(\Delta) \leq \overline{SD}(\Gamma)$ ו $\underline{SD}(\Gamma) \leq \underline{SD}(\Delta)$

טענת עזר 1

נתונות חלוקות $\Gamma \subseteq \Delta$ של הקטע $[a,b]$ כך שב Δ יש בדיוק נקודה אחת נוספת על פני Γ , ופונקציה חסומה המוגדרת על $[a,b]$. אז מתקיימים אי השוויונים $\overline{SD}(\Delta) \leq \overline{SD}(\Gamma)$ ו $\underline{SD}(\Gamma) \leq \underline{SD}(\Delta)$

הוכחת הטענה הגדולה על סמך נכונות טענת עזר 1.

באינדוקציה על מספר הנקודות של $|\Delta - \Gamma|$. אם $|\Delta - \Gamma| = 1$, זו בדיוק טענת העזר ומותר לנו להשתמש בה. נניח כי הוכחנו את

הטענה עבור $|\Delta-\Gamma|=n$, ונוכיח עבור $|\Delta-\Gamma|=n+1$. נניח כי Δ יש בדיוק $n+1$ נקודות נוספות על פני Γ , נבחר θ מתוך הנקודות הנוספות ונוסיף ל- Γ , נקבל חלוקה אותה נסמן Θ . אז מתקיים $\Gamma \subseteq \Theta \subseteq \Delta$, וגם מתקיים כי $|\Theta-\Gamma|=n$ ו- $|\Delta-\Theta|=1$. אז אי השויון $\overline{SD}(\Theta) \leq \overline{SD}(\Gamma)$ מתקיים על סמך הנחה האינדוקציה, ואי השויון $\overline{SD}(\Delta) \leq \overline{SD}(\Theta)$ מתקיים על סמך טענת עזר 1, ובסך הכל מתקיים $\overline{SD}(\Delta) \leq \overline{SD}(\Theta) \leq \overline{SD}(\Gamma)$. כדרוש. ההוכחה עבור אי השויון ההפוך דומה.

טענת עזר 2

נתונה החלוקות $\Gamma \subseteq \Delta$ של הקטע $[a,b]$ כך ש- $\Delta = \{a,d,b\}$ וכך ש- $\Gamma = \{a,b\}$. כלומר ב- Δ יש בדיוק הנקודה d נוספת על פני שתי הנקודות של Γ , ופונקציה חסומה המוגדרת על $[a,b]$. אז מתקיימים אי השויונים $\overline{SD}(\Delta) \leq \overline{SD}(\Gamma)$ ו- $\underline{SD}(\Delta) \leq \underline{SD}(\Gamma)$

הוכחת טענת עזר 1 על סמך טענת עזר 2

נסמן את הנקודה היחידה של $\Delta-\Gamma$ על ידי d . אז קים i יחיד, כך ש- $x_{i-1} \leq d \leq x_i$. אז באי השויון $\overline{SD}(\Delta) \leq \overline{SD}(\Gamma)$ נקבל כי לכל $j, 1 \leq j \leq n, j \neq i$ המחובר ה- j בסכומים $\overline{SD}(\Gamma)$ ו- $\overline{SD}(\Delta)$ זהה ושוה ל- $(x_j - x_{j-1}) \text{Sup}(f(x)), x \in [x_{j-1}, x_j]$, ולכן ניתן לקזז אותו משני אגפי אי השויון ולקבל טענה שקולה בעלת פחות מחובר, וכך לעשות לכל $j, 1 \leq j \leq n, j \neq i$. לאחר כל הצמצומים נקבל כי נותר הסכום $\overline{SD}(\Delta)$ מתוך $(d - x_{i-1}) \text{Sup}(f(x)), x \in [x_{i-1}, x_d] + (x_i - d) \text{Sup}(f(x)), x \in [x_i, d]$ ונותר האבר $(x_i - x_{i-1}) \text{Sup}(f(x)), x \in [x_{i-1}, x_i]$ מתוך $\overline{SD}(\Gamma)$, ועל ידי הסימון $x_{i-1} = a, x_i = b, d = d$ נקבל את המצב של טענת עזר 2.

הוכחת טענת עזר 2

חסם עליון (סופרמום) על פני קבוצה חלקית תמיד קטן או שווה לחסם הגדולה יותר ולכן מתקיימים אי השויונים

$$1 \quad \text{Sup}(f(x)), x \in [a, d] \leq \text{Sup}(f(x)), x \in [a, b]$$

$$\text{Sup}(f(x)), x \in [d, b] \leq \text{Sup}(f(x)), x \in [a, b]$$

הראשון ב- $(d-a)$ ואת השני ב- $(b-d)$ ונקבל

$$(d-a) \text{Sup}(f(x)), x \in [a, d] + (b-d) \text{Sup}(f(x)), x \in [d, b] \leq \{(d-a) + (b-d)\} \text{Sup}(f(x)), x \in [a, b]$$

או מה ששקול

$$\overline{SD}(\Delta) \leq \{(d-a) + (b-d)\} \text{Sup}(f(x)), x \in [a, b] = (b-a) \text{Sup}(f(x)), x \in [a, b] = \overline{SD}(\Gamma)$$

ההוכחה עבור אי השויון ההפוך דומה.

טורים

ידוע כי אפשר לחבר שני איברים בשדה, ולפי חוק הקבוץ אפשר לחבר שלושה, ארבעה, חמישה וכל מספר סופי של איברים. מה עושים כשיש לנו מספר אינסופי של מחוברים?

אינפי לעזרת חיבור בשדות

נתונה סדרה של איברים $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$, ורוצים לחבר את כולם, ואי אפשר. ניצור את סדרת הסכומים החלקיים $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots, S_n = \sum_{k=1}^n a_k, \dots$ ואם לסדרה זו יש גבול S , נגיד כי הסכום של אינסוף איברי הסדרה הוא S , נסמן $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$, ונקרא לסדרת הסכומים החלקיים הטור המבוסס על הסדרה, או הטור של הסדרה, ול S נקרא סכום הטור. אם הטור איננו מתכנס נאמר כי הוא מתבדר.

בטור כלשהו נפריד את הדיון לשתי שאלות. האם הטור מתכנס או מתבדר, ומהו סכום הטור. בדרך כלל תשובה לשאלה הראשונה היא כבר מסובכת מספיק, והדוגמא הבאה היא בין היחידות שבה יודעים האם הטור מתכנס ולאיזה סכום.

דוגמא טור הנדסי

נתון מספר ממשי x , ונגדיר $a_1 = 1, a_2 = x, a_3 = x^2, \dots, a_n = x^{n-1}, \dots$ ונחשב

את סדרת הסכומים החלקיים $S_n = \sum_{k=1}^n a_k = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}$ אז

נביט על $xS_n = \sum_{k=1}^n xa_k = x + x^2 + \dots + x^{n-1} + x^n$ ונחשב

$S_n - xS_n = 1 - x^n \rightarrow (1-x)S_n = 1 - x^n \rightarrow S_n = \frac{1-x^n}{1-x}$ ולכן אם מתקיים

$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ ולכן $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x}$ ולכן זהו סכום הטור

בתנאי ש $-1 < x < 1$. עבור $x=1$ $S_n = n$ הטור מתבדר. עבור $x=-1$

נקבל כי עבור n זוגי, $S_n=0$ ועבור n איזוגי $S_n=2/(1-x)$, ולכן הטור מתבדר. עבור $1 < x$, מתקיים $S_n = \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{x^n-1}{x-1}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\infty}{x-1} = \infty$. עבור $x < -1$, מתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\pm\infty}{x-1} = \pm\infty$. והטור מתבדר.

טענה מחיקת מספר סופי של איברים

נתונה סדרה $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$, ונתון מספר טבעי K , נגדיר סדרה חדשה על ידי מחיקת K האיברים הראשונים $b_1 = a_{K+1}, b_2 = a_{K+2}, \dots, b_n = a_{K+n}, \dots$, הטור של הסדרה a_n מתכנס. ב. הטור של הסדרה b_n מתכנס. א.

הוכחה:

$$S_n(b) = \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n a_{K+k} = \sum_{k=1}^{K+n} a_k - \sum_{k=1}^K a_k = S_{K+n}(a) - S_K(a)$$

כאשר n שואף לאינסוף התכנסות אגף שמאל שקולה להתכנסות אגף ימין, והבטוי היחיד התלוי ב- n הוא $S_{K+n}(a)$ והתכנסותו שקולה להתכנסות הטור של הסדרה a . ■

טענה

נניח כי הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס, אז גם הסדרה a_k מתכנסת ל-0.

הוכחה

לפי ההגדרה $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ וגם לפי ההגדרה $S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} a_k$ ולכן מתקיים

$a_n = S_n - S_{n-1}$. בנוסף גם S_n וגם S_{n-1} מתכנסים לאותו גבול S ,

ולכן ■ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0$.

טורים חיוביים (החל ממקום מסוים)

נניח שקיים K מסויים כך שמתקיים $(0 \leq a_n) \rightarrow (K < n)$. אז כלומר למעט K האיברים הראשונים, כל שאר המחברים הם אי שליליים, ולכן מתקיים $(S_n \leq S_{n+1}) \rightarrow (K < n)$, כלומר למעט K האיברים הראשונים סדרת הסכומים החלקיים היא עולה במובן הרחב.

טענה התכנסות שקולה לחסימות

נתונה סדרה שהיא אי שלילית החל ממקום מסויים. אז הטענות הבאות שקולות.

א. הטור של הסדרה מתכנס (סדרת הסכומים החלקיים מתכנסת).

ב. הטור של הסדרה חסום (סדרת הסכומים החלקיים חסומה).

הוכחה

כל סדרה מתכנסת היא חסומה, ולכן א גורר את ב. בהנתן ב, כלומר סדרת הסכומים החלקיים חסומה, וגם נתון שהיא עולה במובן הרחב (החל ממקום מסויים), וידוע (לפי משפט וירשטרס) כי סדרה עולה (החל ממקום מסויים) וחסומה היא מתכנסת ולכן ב גורר את א. ■

משפט (מבחן ההשוואה לטורים חיוביים)

נתונות שתי סדרות ונתון K טבעי כך ש $(0 \leq a_n \leq b_n) \rightarrow (K < n)$. אז :

א. אם הטור $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ מתכנס אז גם הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס.

ב. אם הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתבדר אז גם הטור $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ מתבדר.

הוכחה

נמחק את K האיברים הראשונים של שתי הסדרות, ולפי הטענה הראשונה התכנסות (או התבדרות) של אף טור לא

משתנה. אז מתקיים $(0 \leq a_n \leq b_n)$, ולכן לכל m טבעי מתקיים

$$0 \leq S_m(a) = \sum_{n=1}^m a_n \leq \sum_{n=1}^m b_n = S_m(b)$$

הוכחת א. לכן אם הטור $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ מתכנס, אז סדרת הסכומים

החלקיים $S_m(b)$ חסומה, ולכן הסדרה הקטנה ממנה $S_m(a)$

חסומה ולכן הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס.

הוכחה ראשונה של ב. לכן אם הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתבדר, אז סדרת

הסכומים החלקיים $S_m(a)$ אינה חסומה, ולכן הסדרה הגדולה

ממנה $S_m(b)$ אינה חסומה ולכן הטור $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ מתבדר.

הוכחה שניה של ב. אם נסמן את טענה א בקצור על ידי $p \rightarrow q$,

אז טענה ב משמעה $\bar{q} \rightarrow \bar{p}$, ושתי אלו הן טענות שקולות לוגית.

■

דוגמא

בדוק האם הטור $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ מתכנס וחשב את סכומו.

תשובה

מתקיים כי $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, ולכן

$$S_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}. \text{ ולכן } S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

ולכן $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{\infty} = 1$. כלומר הטור מתכנס וסכומו 1.

דוגמא

בדוק האם הטור $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2}$ מתכנס והערך את סכומו.

תשובה

לכל n מתקיים כי $\frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{k(k+1)}$, ולכן לפי משפט ההשוואה סעיף א, הטור $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2}$ מתכנס וסכומו קטן או שווה לסכום הטור הגדול, כלומר קטן או שווה 1.

דוגמא

בדוק האם הטור $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ מתכנס והערך את סכומו.

תשובה

הסדרה של הטור הזה זהה לסדרה של הטור הקודם, למעט האבר הראשון של הטור החדש שלא קיים בטור הקודם. לפי הטענה אודות מחיקת האיברים, גם הטור החדש מתכנס.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \leq 1 + 1 = 2.$$

דוגמא

בדוק האם הטור $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ מתכנס.

תשובה

אם מתקיים $2 \leq \alpha$, אז נובע לכל k טבעי כי $\frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{k^2}$, ולכן לפי סעיף א של מבחן ההשוואה ולפי התרגיל הקודם הטור מתכנס וסכומו קטן או שווה ל-2. עבור כל ערך אחר של α אין לנו כרגע שום דרך לדעת את התכנסותו או התבדרותו.

דוגמא (הטור ההרמוני)

בדוק האם הטור $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ מתכנס.

תשובה

נעריך חלק מהסכומים החלקיים. אז מתקיים $s_1 = 1$, $s_2 = \frac{3}{2}$

וכן $s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 2$. בצורה דומה

וכן $S_{16} \geq 3$ ובצורה דומה $S_8 = S_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \geq 2 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 2.5$

$S_{2^n} \geq \frac{2+n}{2}$ ולכן כיון ש $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+n}{2} = \infty$, נובע כי $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2^n} = \infty$, ולכן

הסדרה S_n איננה חסומה, ולכן הטור ההרמוני $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ מתבדר.

דוגמא

בדוק האם הטור $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ מתכנס.

תשובה

אם מתקיים $2 \leq \alpha$, ראינו כי $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ מתבדר. אם $\alpha \leq 1$, אז נובע

לכל k טבעי כי $\frac{1}{k} \leq \frac{1}{k^\alpha}$, ולכן לפי סעיף ב של מבחן

ההשוואה ולפי התרגיל הקודם הטור מתבדר. עבור כל ערך אחר של α אין לנו כרגע שום דרך לדעת את התכנסותו או התבדרותו.

אינטגרל לא אמיתי ע"פ קרן (קטע אינסופי)

עד עתה למדנו על אינטגרלים ע"פ קטע סופי. אם נתונה פונקציה f מוגדרת ורציפה ע"פ הקרן $[a, \infty)$, ונוכל להגדיר את

האינטגרל של f ע"פ הקרן על ידי זה שנחשב את $\int_a^b f(x) dx$,

ולתוצאה זו נעשה. אם הגבול מתכנס נגיד כי האינטגרל מתכנס, ואחרת נגיד כי האינטגרל מתבדר.

דוגמא

האם $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ מתכנס?

תשובה

כידוע $\int_1^b \frac{dx}{x} = \ln(x)|_1^b = \ln(b) - \ln(1) = \ln(b)$. ולכן $\lim_{b \rightarrow \infty} \ln(b) = \infty$, ולכן

האינטגרל מתבדר.

טענה התכנסות שקולה לחסימות

נתונה פונקציה רציפה ואי שלילית f על הקרן $[K, \infty)$. אז הטענות הבאות שקולות:

א. האינטגרל $\int_K^\infty f(t) dt$ מתכנס.

ב. האינטגרל $\int_K^\infty f(t) dt$ חסום מעיל.

הוכחה

כיון שהנגזרת של $\int_K^b f(t) dt$ היא $f(b) > 0$ כלומר הנגזרת חיובית, אז $\int_K^b f(t) dt$ היא פונקציה עולה של b , ולכן (כמו משפט וירשטרס לסדרות) מספיק להראות כי $\int_K^b f(t) dt$ היא פונקציה חסומה מעיל. ■

מבחן האינטגרל

נתונה פונקציה f ונתון שיש K טבעי כך שבקטע $[K, \infty)$ הפונקציה רציפה ויורדת במובן הרחב, וכן $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. אז הטענות הבאות שקולות:

א. הטור $\sum_{n=1}^\infty f(n+K)$ מתכנס.

ב. האינטגרל $\int_K^\infty f(t) dt$ מתכנס.

וכמו כן שתי הטענות הבאות שקולות:

ג. הטור $\sum_{n=1}^\infty f(n+K)$ מתבדר.

ד. האינטגרל $\int_K^\infty f(t) dt$ מתבדר.

הוכחה

כיון ש- g היא הטענה ההפוכה ל- a , ו- d הפוכה ל- b , אז אם נוכיח כי a שקולה ל- b , מכאן ינבע כי g שקולה ל- d .

כיון ש f חיובית א שקול לכך כי $\sum_{n=1}^{\infty} f(n+K)$ חסום ו-ב שקול לכך

כי $\int_K^{\infty} f(t)dt$ חסום, ונוכיח שקילות בין החסימויות.

אי השויונים $\sum_{n=1}^{\infty} f(n+K) \leq \int_K^{\infty} f(t)dt \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n+K-1)$ שאותם מוכיחים

בציור, מראים כי חסימות מלעיל של הטור הימני גוררת חסימות מלעיל של האינטגרל אשר גוררת חסימות מלעיל של הטור השמאלי, אבל חסימות הטור הימני והשמאלי שקולות,

כיון שההפרש ביניהם הוא האבר הקבוע $f(K)$. ■

דוגמא

בדוק את התכנסות הטור $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

תשובה

ראינו כי הטור $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ מתכנס עבור $2 \leq \alpha$ ומתבדר $\alpha \leq 1$ עבור ולא

הוכחנו התכנסות או התבדרות עבור $1 < \alpha < 2$. עבור תחום זה נביט בפונקציה $f = \frac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha}$. פונקציה זו רציפה וגזירה, ונגזרתה

היא, כלומר $\frac{-\alpha}{x^{\alpha+1}}$ הנגזרת שלילית ולכן f יורדת בקטע $(1, \infty)$.

מתקיימים תנאי משפט האינטגרל ולכן התכנסות או התבדרות הטור שקולה בהתאמה לחסימות או אי חסימות האינטגרל $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$

. נחשב ונקבל. $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left. \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b^{1-\alpha} - 1^{1-\alpha}}{1-\alpha}$. כיון ש $1 < \alpha < 2$,

נובע כי $1-\alpha < 0$ ולכן $\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b^{1-\alpha} - 1^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \frac{0 - 1^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$. כלומר האינטגרל חסום ולכן הטור מתכנס.

מסקנה

הטור $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ מתכנס עבור $1 < \alpha$ ומתבדר עבור $\alpha \leq 1$.

מבחן השואת הגבולות מקרה ראשון

נתונות סדרות חיוביות a_n, b_n , ונתון כי מתקיים $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$. אם

$$L=0, \text{ והטור } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ מתכנס, אז גם הטור } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ מתכנס.}$$

נשים לב כי כיון שהסדרות המקוריות חיוביות, אז בעצם $L=0+$

הוכחת מקרה ראשון

נבחר $\varepsilon = 1$. אז לפי הגדרת הגבול, קיים $0 < K < \infty$, כך שעבור $n > K$ מתקיים $0 < \frac{a_n}{b_n} < 1 + 1 = 2$. כיון שהסדרות חיוביות נובע כי

$0 < \frac{a_n}{b_n} < 2$, ולכן עבור $n > K$ נובע כי $a_n < 2b_n$, ולכן לפי משפט

מחיקת K האיברים הראשונים, נובע הטורים המחוקים מקימים כי $a_n < 2b_n$, ולכן לפי משפט השוואה התכנסות $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

גוררת את התכנסות $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ■

מבחן השוואת הגבולות מקרה שני

נתונות סדרות חיוביות a_n, b_n , ונתון כי מתקיים $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$. אם

$$L=\infty, \text{ והטור } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ מתכנס, אז גם הטור } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ מתכנס.}$$

הוכחת מקרה שני

כיון ש $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$, נובע כי $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{\infty} = 0$. ולכן מקרה ב נובע

ממקרה א. ■

מבחן השוואת הגבולות מקרה שלישי

נתונות סדרות חיוביות a_n, b_n , ונתון כי מתקיים $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$. אם

$0 < L < \infty$, התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ שקולה להתכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

הוכחת מקרה שלישי

כיון ש $0 < L < \infty$, נבחר $\varepsilon = \frac{L}{2}$. אז לפי הגדרת הגבול, קיים $0 < K < \infty$

כך שעבור $n > K$ מתקיים $\frac{L}{2} = L - \frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < L + \frac{L}{2} = \frac{3L}{2}$ ולכן עבור

$n > K$ נובע כי $b_n \frac{L}{2} < a_n < \frac{3L}{2} b_n$, ולכן לפי משפט מחיקת K

האיברים הראשונים, נובע הטורים המחוקים מקימים כי

$b_n \frac{L}{2} < a_n < \frac{3L}{2} b_n$. התכנסות $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ גוררת כי $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ חסום וכפל

בקבוע גורר כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3Lb_n}{2}$ חסום ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חסום ולכן מתכנס.

נכתוב את אי השוויון $b_n \frac{L}{2} < a_n$ בצורה $b_n < \frac{2a_n}{L}$. התכנסות $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

גוררת כי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חסום ולכן גם $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_n}{L}$ חסום ולכן גם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ חסום

ולכן מתכנס. ■

דוגמא

בדוק האם $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 - 3n + 4}{5n^4 - 6n^3 + 7n^2 - 8n + 9}$ מתכנס.

תשובה

נגדיר $a_n = \frac{2n^2 - 3n + 4}{5n^4 - 6n^3 + 7n^2 - 8n + 9}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$, ונשתמש במשפט השואת

הגבול. אז מתקיים

ולכן לפי משפט $\frac{a_n}{b_n} = \frac{2n^4 - 3n^3 + 4n^2}{5n^4 - 6n^3 + 7n^2 - 8n + 9}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{2}{5} = L, 0 < L < \infty$

השואת הגבול מקרה 3 נובע כי התכנסות או התבדרות כל אחד מהטורים גוררת בהתאמה את התכנסות או התבדרות הטור

השני. ידוע כי $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס, ולכן גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

מבחן השואת המנות

נתונים שני טורים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ חיוביים. נניח כי קיים $0 < K$ טבעי

כך ש $(n > K) \rightarrow \left(\frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \frac{b_n}{b_{n-1}}\right)$. אז א. התכנסות $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ גוררת

התכנסות $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. ב. התבדרות $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ גוררת התבדרות $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

הוכחה

על ידי משפט אפשר למחוק את K האיברים הראשונים ומסקנות המשפט לא תשתנה. אז מתקיים

$$0 \leq \frac{a_2}{a_1} \leq \frac{b_2}{b_1}, 0 \leq \frac{a_3}{a_2} \leq \frac{b_3}{b_2}, \dots, 0 \leq \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \frac{b_n}{b_{n-1}}$$

או מה ששקול $0 \leq \prod_{i=1}^n \frac{a_{i+1}}{a_i} \leq \prod_{i=1}^n \frac{b_{i+1}}{b_i}$ או מה ששקול

$$a_n \leq \frac{b_n a_1}{b_1} . \text{ אם נתון כי } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ מתכנס, אז } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ חסום, ואז } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n a_1}{b_1}$$

חסום ואז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חסום ולכן מתכנס. וראינו כי א גורר את

ב.

יש שתי הוכחות לכך שב גורר את א

הוכחה ראשונה. נכתוב את $0 \leq \frac{a_n}{a_1} \leq \frac{b_n}{b_1}$ בצורה $\frac{a_n b_1}{a_1} \leq b_n$ ולכן אם

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ מתבדר אז הוא לא חסום ולכן } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n b_1}{a_1} \text{ איננו חסום ולכן}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ איננו חסום ולכן מתבדר.}$$

הוכחה שניה

נסמן את הטענה $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס באות p , את הטענה $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

מתכנס באות q ואז הנסוח של טענה א הוא $p \rightarrow q$, אז

הטענה $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתבדר היא \bar{p} והטענה $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר היא \bar{q}

והנסוח של טענה ב הוא $\bar{q} \rightarrow \bar{p}$, וידוע בלוגיקה כי טענה זו

שקולה לטענה $p \rightarrow q$. ■

אין דוגמא לשימוש. חשיבות משפט השוואת המנות היא בכך שהיא טענת עזר במשפט הבא, אשר יש לו הרבה דוגמאות.

משפט המנות של ד'אלמברט, גרסת האיברים.

נתונה סדרה חיובית a_n נניח כי קיים $0 < K$ טבעי

א. כך ש $(n > K) \rightarrow (1 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n})$. אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

ב. וקיים מספר $0 < q < 1$ כך ש $(n > K) \rightarrow (\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q)$. אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

הוכחה

הוכחת המשפט נובעת ממשפט השוואת המנות. א. הנתון $1 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ניתן להכתב בצורה $\frac{1^{n+1}}{1^n} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}$, ולכן לפי חלק ב של משפט השוואת המנות, ומכיון שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} 1^n$ מתבדר, לכן גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר. ב. הנתון $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ ניתן להכתב בצורה $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{q^{n+1}}{q^n}$, ולכן לפי חלק ב של משפט השוואת המנות, ומכיון שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ מתכנס, לכן גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס. ■

משפט המנות של ד'אלמברט גרסת הגבול

נתונה סדרה חיובית a_n נניח כי קיים $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$

א. אם $L < 1$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

ב. אם $1 < L$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר

הוכחה

אם $L < 1$, נבחר $\varepsilon = \frac{L-1}{2}$. אז $[L-\varepsilon, L+\varepsilon] = [\frac{L+1}{2}, \frac{2L-1}{2}]$ ומתקיים כי $1 = \frac{1+1}{2} < \frac{L+1}{2}$ ולכן קיים $0 < K$ כך ש $(n > K) \rightarrow (1 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n})$ ולכן לפי משפט ד'אלמברט, גרסת האיברים, הטור מתבדר.

אם $L < 1$, נבחר $\varepsilon = \min\{\frac{1-L}{2}, L\}$. אז $[L-\varepsilon, L+\varepsilon] \subseteq [0, \frac{1+L}{2}]$ ומתקיים כי $q = \frac{L+1}{2} < 1$ ולכן קיים $0 < K$ כך ש $(n > K) \rightarrow (\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1)$ ולכן לפי משפט ד'אלמברט, גרסת האיברים, הטור מתכנס. ■

דוגמאות

בדוק את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$.

תשובה

$\frac{q^{n+1}}{q^n} = q, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^{n+1}}{q^n} = q = L$ ולכן הטור מתכנס עבור $q < 1$ ומתבדר עבור $q > 1$, כלומר קבלנו את הדוגמא הראשונה של טור הנדסי.

בדוק את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

תשובה

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1}$, ולכן $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = 0$. ומכיון שהגבול קטן מ-1, הטור מתכנס.

בדוק את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$

תשובה

מתכנס, אם $x < 1$, הטור מתבדר. אם $x = 1$, נציב בנוסחת האבר הכללי ונקבל כי הטור מתבדר.

ולכן, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)x^{n+1}}{nx^n} = \frac{(n+1)x}{n}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} x = x$. ואם $x < 1$, הטור

משפט השורש של קושי, גרסת האיברים

נתונה סדרה חיובית a_n נניח כי קיים $0 < K < 1$ טבעי

א. כך ש $(n > K) \rightarrow (1 \leq \sqrt[n]{a_n})$. אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

ב. וקיים מספר $0 < q < 1$ כך ש $(n > K) \rightarrow (\sqrt[n]{a_n} \leq q)$. אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

הוכחה.

נעלה את אי השוויונים בנתון בחזקת n . אז מקרה א הופך להיות $(n > K) \rightarrow (1 \leq a_n)$, ולפי מבחן ההשוואה הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר. מקרה ב הופך להיות $(n > K) \rightarrow (a_n \leq q^n)$ ומתוך השוואה לטור גיאומטרי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס. ■

משפט השורש של קושי, גרסת הגבול

נתונה סדרה חיובית a_n נניח כי קיים $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$

א. אם $L < 1$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

ב. אם $L > 1$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר

הוכחה

אם $L < 1$, נבחר $\varepsilon = \frac{L-1}{2}$. אז $[\frac{L-1}{2}, \frac{L+1}{2}] = [L-\varepsilon, L+\varepsilon]$, ומתקיים כי $1 = \frac{1+1}{2} < \frac{L+1}{2}$ ולכן קיים $0 < K$ כך ש $(n > K) \rightarrow (1 \leq \sqrt[n]{a_n})$, ולכן לפי משפט קושי, גרסת האיברים, הטור מתבדר.

אם $L < 1$, נבחר $\varepsilon = \frac{1-L}{2}$. אז $[L-\varepsilon, L+\varepsilon] \subseteq [\frac{2L-1}{2}, \frac{1+L}{2}]$ ומתקיים
 כי $q = \frac{L+1}{2} < 1$ ולכן קיים $0 < K$ כך ש $(n > K) \rightarrow (\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1)$, ולכן
 לפי משפט קושי, גרסת האיברים, הטור מתכנס. ■

דוגמאות

בדוק את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$.

תשובה

$\sqrt[n]{q^n} = q, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{q^n} = q = L$
 ולכן הטור מתכנס עבור $q < 1$ ומתבדר עבור $q > 1$,
 כלומר קבלנו את הדוגמא הראשונה של טור הנדסי.

בדוק את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 q^n$.

תשובה

$\sqrt[n]{n^2 q^n} = (\sqrt[n]{n})^2 q, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n})^2 = q1^2 = q = L$
 ולכן הטור מתכנס עבור $q < 1$
 ומתבדר עבור $q > 1$

מבחן ראבה גרסת האיברים.

נתונה סדרה חיובית a_n נניח כי קיים $0 < K$ טבעי

א. כך ש $(n > K) \rightarrow (n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) \leq 1)$ אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

ב. וקיים מספר $1 < p$ כך ש $(n > K) \rightarrow (p \leq n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1))$ אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
 מתכנס.

הערה:

משפט ראבה איברים כולל בחובו את משפט ד'אלמברט איברים כמקרה פרטי. אם נתון שיש $0 < K$ כך ש $(n > K) \rightarrow (1 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n})$, אז נובע כי עבור n -ים גדולים $\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1$, ולכן $\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \leq 0$ ולכן $n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) \leq 0$ ולכן לפי משפט ראבה איברים הטור מתבדר. אם נתון שיש $0 < K$ כך ש

$$(n > K) \rightarrow (\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1), \text{ אז נובע כי עבור } n\text{-ים גדולים } \frac{1}{q} \leq \frac{a_n}{a_{n+1}}, \text{ ולכן}$$

$$0 < \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \text{ ולכן } n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) \text{ שואף לאינסוף ולכן עבור כל } p \text{ חיובי ו } n \text{ גדול}$$

$$p \leq n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) \text{ ולכן לפי משפט ראבה איברים הטור מתכנס.}$$

הוכחה.

בכל מקרה על ידי משפט מחיקת האיברים אפשר להניח כי אי השוויונים נכונים עבור כל n .

מקרה א

$$[n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) \leq 1] \rightarrow (\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}) \rightarrow (\frac{1/(n+1)}{1/n} \leq \frac{n}{n+1} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n})$$

המנות, וכיון שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתבדר, הרי שגם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

מקרה ב

$$[p \leq n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1)] \rightarrow ((\frac{n+1}{n})^{(1+p)/2} \leq * \leq 1 + \frac{p}{n} \leq \frac{a_n}{a_{n+1}}) \rightarrow (\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{(1/(n+1))^{(1+p)/2}}{(1/n)^{(1+p)/2}})$$

כאשר את אי השוויון המסומן * נוכיח מיד. לפי מבחן השואת המנות, וכיון ש $1 < (1+p)/2$ אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{(1+p)/2}}$ מתכנס, הרי שגם

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס. נוכיח כעת את אי השוויון המסומן *.

$$[(\frac{n+1}{n})^{(1+p)/2} \leq 1 + \frac{p}{n}] \leftrightarrow [\frac{(\frac{n+1}{n})^{(1+p)/2} - 1}{1/n} \leq p] \leftrightarrow [\frac{(1+(1/n))^{(1+p)/2} - 1}{1/n} \leq p]$$

נפעיל על הבטוי השמאלי בטענה הימנית גבול כאשר n שואף לאינסוף. אז המונה והמכנה שואפים ל-0 ולכן ניתן להפעיל את כלל ל'הופיטל ונקבל

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+(1/n))^{(1+p)/2} - 1}{1/n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{(1+p)/2} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{((1+p)/2)(1+x)^{(1+p)/2-1}}{1} = \frac{1+p}{2}$$

. כיון שמתקיים $p < (1+p)/2$, נבחר $\varepsilon = \frac{p-1}{2}$, ואז

$M < n$, כלומר יש $0 < M$, כך שעבור $(\frac{1+p}{2} - \varepsilon, \frac{1+p}{2} + \varepsilon) = (1, p)$
 מתקיים אי השויון * . לכן בהוכחת מקרה ב, יש למחוק את
 $\max\{K, M\}$ האיברים הראשונים, כאשר M הוא מספר
 האיברים שלא בהכרח מקיימים את אי השויון * , ו K הוא
 מספר האיברים שלא בהכרח מקיימים את ההנחה $n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) \leq p$.

■

מבחן ראבה גרסת הגבול.

נתונה סדרה חיובית a_n נניח כי קים $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = L$

א. אם $L < 1$ אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

ב. אם $L > 1$ אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

הוכחה: א. נבחר $(L - \varepsilon, L + \varepsilon) = \varepsilon$ וזאז $(\frac{L+1}{2}, \frac{3L-1}{2})$ ולכן למעט מספר סופי של איברים שאר האיברים
 $n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1)$ מקיימים כי הם גדולים מהמספר $(1+L)/2$ ולכן גם
 גדולים ממספר הגדול מ-1. לפי משפט ראבה איברים הטור
 מתכנס. ב. אם $L < 1$, נבחר $\varepsilon = \frac{1-L}{2}$. אז $[L - \varepsilon, L + \varepsilon] \subseteq [\frac{2L-1}{2}, \frac{1+L}{2}]$
 , ולכן למעט מספר סופי של איברים שאר האיברים $n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1)$
 מקיימים כי הם קטנים מהמספר $(L+1)/2$ ולכן גם קטנים מ-1
 לפי משפט ראבה איברים הטור מתבדר. ■

דוגמא

בדוק האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$ מתכנס או מתבדר.

תשובה

ננסה את מבחן ד'אלמברט. אז

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1} e^n n!} = e \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{e}{e} = 1$$

ד'אלמברט נכשל.

ננסה את מבחן ראבה.

$$n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = n \left(\frac{1}{e} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n - 1 \right) = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e}{\frac{e}{n}}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e}{\frac{e}{n}} = \frac{0}{0}, x = \frac{1}{n}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e}{\frac{e}{n}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x},$$

$$(1+x)^{1/x} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}, [(1+x)^{1/x}]' = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} \left(\frac{x}{(x+1)} - \ln(1+x) \right) = (1+x)^{1/x} \left(\frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2(x+1)} \right) =$$

$$= \frac{(1+x)^{1/x}}{(1+x)} \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x} = \frac{e \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \ln(1+x) - \frac{1+x}{1+x})}{2x} = \frac{-e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}}{2} = \frac{-e}{2}$$

לכן הטור מתבדר.

טורים כלליים

עד עתה עסקנו בטורים של סדרות חיוביות. נבע שסדרת הסכומים החלקיים עולה ולכן מתכנסת אם ורק אם היא חסומה.

עבור טורים של סדרות כלשהן, אין הקשר בין חסימות והתכנסות.

התכנסות בהחלט ובתנאי

נתונה סדרה a_n . נגיד כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ של הסדרה $|a_n|$ מתכנס. כיון שהסדרה היא אי שלילית, הרי לגביה תקפים כל המשפטים הקודמים.

משפט

אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט, אז הוא מתכנס.

ההוכחה מתבססת על סמך קריטריון קושי שאותו לא הספקנו ללמוד.

דוגמא

האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ מתכנס?

תשובה

נביט על סדרת הערכים המוחלטים $\frac{1}{n^2}$. ידוע כי הטור שלה מתכנס ולכן הטור המקורי מתכנס בהחלט ולכן הטור מתכנס.

משפט לייבניץ

נתונה סדרה a_n ונתון כי יש $0 < K < n$ שעבור $K < n$ האיברים חיוביים, והם סדרה היורדת ל-0. אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ מתכנס. נסמן את גבולו ב-S. יהי נתון מספר טבעי m , כך ש $K < 2m$. אז מתקיים כי $S_{2m+1} \leq S \leq S_{2m}$. כאשר נזכר כי $S_p = \sum_{n=1}^p (-1)^n a_n$.

הוכחה

עבור $K < 2m$ מתקיים כי $S_{2m} = S_{2m-1} + (-1)^{2m} a_{2m} > S_{2m-1}$ וכן $S_{2m+1} = S_{2m} + (-1)^{2m+1} a_{2m+1} < S_{2m}$ וכן $S_{2m+1} = S_{2m-1} + (-1)^{2m} a_{2m} + (-1)^{2m+1} a_{2m+1} = S_{2m-1} + a_{2m} - a_{2m+1} > S_{2m-1}$ $S_{2m+2} = S_{2m} + (-1)^{2m+1} a_{2m+1} + (-1)^{2m+2} a_{2m+2} = S_{2m} - a_{2m+1} + a_{2m+2} = S_{2m} - (a_{2m+1} - a_{2m+2}) < S_{2m}$, ולכן נסכם זאת כך $S_{2m-1} \leq S_{2m+1} \leq S_{2m+2} \leq S_{2m}$. לכן תת סדרת הסכומים החלקיים בעלי אינדקס זוגי היא יורדת, תת סדרת הסכומים החלקיים בעלי אינדקס אי זוגי היא עולה. לכל שני אינדקסים $K < 2j, K < 2m+1$, נוכיח כי $S_{2m+1} \leq S_{2j}$, ואכן נבחר אינדקס k המקיים $\max\{m, j\} \leq k$, ומכאן נובע $2m+1 \leq 2k+1, 2j \leq 2k$, $S_{2m+1} \leq S_{2k+1} \leq S_{2k} \leq S_{2j}$ ונובע כי כל אחד מאיברי הסכומים החלקיים הזוגיים גדול מכל אחד מאיברי הסכומים החלקיים האי זוגיים.

נסכם זאת כך, S_m מתחלקת לשתי תתי סדרות, S_{2m+1} שהיא תת סדרה עולה, ו S_{2m} שהיא תת סדרה יורדת, באופן שכל איבר של תת הסדרה היורדת גדול מכל איבר של תת הסדרה העולה.

השלב הבא בהוכחת משפט לייבניץ (וגם בהוכחת משפט ערך הביניים של קושי וגם בהוכחת המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי) הוא להראות כי המרחק בין תת הסדרות העולה והיורדת שואף ל-0. ואכן מתקיים כי $S_{2k} - S_{2k+1} = a_{2k+1}$ וזו לפי ההנחה שואפת ל-0.

לכן קיים גבול לסדרה S_m וזהו הגבול של טור לייבניץ S . כיון שהגבול הוא גם של תת הסדרה העולה וגם של היורדת, הרי שלכל n מתקיים כי $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$. ■

הערה: מצב שבו סדרה מתחלקת לשתי תתי סדרות, אחת עולה, אחת יורדת, ושכל אבר של הסדרה היורדת גדול מכל אבר של הסדרה העולה, כבר היה לנו פעמיים.

מקרה ראשון היה בהוכחת תכונת ערכי הביניים של קושי (עבור פונקציה רציפה). אז היתה לנו סדרה יורדת b_n וסדרה עולה a_n , כך ש b_n סמנה את הקצוות הימניים של סדרת קטעים אשר כל קטע מוכל בקטע הקודם לו, ו a_n סמנה את הקצוות השמאליים של אותה סדרת קטעים, ולכן מתקיים כי לכל n, m . $a_n \leq b_m$.

מקרה שני היה בהוכחת המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והעובדה כי האינטגרל הוא גבול של סכומי דרבו עליונים ושל סכומי דרבו תחתונים. אז סכומי דרבו העליונים יורדים ככל שיש יותר נקודות חלוקה, וסכומי דרבו התחתונים עולים ככל שיש יותר נקודות חלוקה, וכל סכום דרבו עליון גדול מכל סכום דרבו תחתון. רק הבדל יחיד הוא שסכומי דרבו אינם בדיוק סדרה, לא תלויים רק באינדקס טבעי n , אלא בקבוצת אינדקסים יותר מסובכת.

דוגמא

$$\text{בדוק את התכנסות הטור } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

תשובה

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ הוא טור לייבניץ כיון שהסדרה $a_n = \frac{1}{n}$ יורדת ל-0. הטור שלנו הוא מינוס של טור מתכנס ולכן מתכנס.

האם הוא מתכנס בהחלט? הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ הוא טור הרמוני ומתבדר ולכן הטור המקורי אינו מתכנס בהחלט.

טור אשר מתכנס ואשר איננו מתכנס בהחלט נקרא מתכנס בתנאי.
 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ הוא טור מתכנס בתנאי.

לומדים בקורס נומרית כי סכום הטור הזה הוא $\ln 2$.

תרגיל

הערך את $\ln 2$ ברמת דיוק 0.2.

תשובה

כיון שהטור הוא מינוס של טור לייבניץ מתחלף המצב, תת סדרת הסכומים החלקיים הזוגיים עולה והאי זוגיים יורדת. לכן

$$S_4 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \leq \ln 2 \leq S_5 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \rightarrow \frac{60-30+20-15}{60} \leq \ln 2 \leq \frac{60-30+20-15+12}{60}$$

$$\rightarrow \frac{35}{60} \leq \ln 2 \leq \frac{47}{60} \rightarrow 0.583333 \leq \ln 2 \leq 0.783333$$

, וקבלנו קטע באורך 0.2 אשר מכיל את $\ln 2$. אכן לפי מחשבון נמצא $\ln 2 = 0.6931$ בקטע זה.

משפט של קושי אודות טור המתכנס בתנאי.

נתון טור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ המתכנס בתנאי לסכום S . אז ניתן לשנות את סדר המחברים בטור כך שיתכנס לכל מספר ממשי (כולל $\pm\infty$).

המשפט ללא הוכחה אבל עם דוגמא

נביט על $\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, ונשנה את סכום האיברים כך

$$\ln 2 = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \dots = \frac{1}{4} + \frac{1}{24} + \frac{1}{60} + \dots = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots\right) = \frac{1}{2} \ln 2$$

. הסתירה התקבלה מכך ששינינו את סדר המחברים והיא דוגמא למשפט קושי.

נמשיך את הדוגמא הקודמת באותיות:

$$\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right) = \frac{4n-2n-(2n-1)}{4n(2n-1)} = \frac{1}{4n(2n-1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right).$$

מבחני אבל ודיריכלה

משפט דיריכלה

נתון הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, וידוע כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ חסום וכי הסדרה a_n מונוטונית ושואפת ל-0. אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

דוגמא

נביט בדוגמא שבה הסדרה a_n חיובית ויורדת ל-0 ובה $b_n = (-1)^n$. אז סדרת הסכומים החלקיים של b_n היא מחזורית ושוה ל-1,0 ולכן היא חסומה ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ הוא טור לייבניץ, כלומר משפט לייבניץ הוא מקרה פרטי של משפט דיריכלה.

דוגמא

נביט בטור $3^{-1} - \frac{1}{3} + \frac{3}{4} - \frac{2}{5} - \frac{1}{6} + \frac{3}{7} - \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \dots$. אז כדי להשתמש במשפט דיריכלה, עלינו לזהות את a_n, b_n שיתאימו למשפט דיריכלה. נבחר $a_n = \frac{1}{n}$ והיא אכן חיובית ויורדת ל-0 ונבחר $b_n = 3, -2, -1, 3, -2, -1$. אז אכן $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ הוא הטור הנתון סדרת הסכומים החלקיים של b_n היא 3,1,0,3,1,0 מחזורית וחסומה ולכן הטור מתכנס לפי משפט דיריכלה.

משפט אבל

נתון הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, וידוע כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טור מתכנס וכי הסדרה a_n מונוטונית וחסומה. אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

טענה :

משפט אבל נובע ממשפט דיריכלה

הוכחה

נניח כי אכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טור מתכנס וכי הסדרה a_n מונוטונית וחסומה.

אז (לפי משפט) מתכנסת ונסמן $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ אז $a_n - a$ מונוטונית

ושואפת ל-0, ומתקיים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a + a) b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a) b_n + a \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. אז

לפי הנתון $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס ולכן גם $a \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס. כיון ש $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס

הוא גם חסום, ו $(a_n - a)$ מונוטונית שואפת ל-0, ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a) b_n$.

מתכנס על סמך משפט דיריכלה. לכן $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a) b_n + a \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

מתכנס כי הוא סכום של טורים מתכנסים. ■

דוגמה

נביט בטור $2 - \frac{2.25}{2} + \frac{(4/3)^3}{3} - \frac{(5/4)^4}{4} + \frac{(6/5)^5}{5} + \dots$ אז כדי להשתמש במשפט

אבל נגדיר $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e$ ואכן הסדרה עולה וחסומה ומתכנסת ל-e.

נגדיר $b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס בתור (מינוס של) טור לייבניץ ואכן

הוא הטור הנתון והוא מתכנס לפי משפט אבל. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

הוכחת משפט דיריכלה

$$s_n = \sum_{k=1}^n b_k, \sum_{k=n}^{n+m} s_k (a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=n+1}^{n+m-1} a_k (s_k - s_{k-1}) + s_n a_n - s_{n+m} a_{n+m+1} \rightarrow \sum_{k=n+1}^{n+m-1} a_n b_n = \sum_{k=n}^{n+m} s_k (a_k - a_{k+1}) - s_n a_n + s_{n+m} a_{n+m+1},$$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+m-1} a_n b_n \right| = \left| \sum_{k=n}^{n+m} s_k (a_k - a_{k+1}) - s_n a_n + s_{n+m} a_{n+m+1} \right| \leq \sum_{k=n}^{n+m} s_k (a_k - a_{k+1}) + s_{n+m} a_{n+m+1} + s_n a_n \leq$$

$$\leq M \left(\sum_{k=n}^{n+m} (a_k - a_{k+1}) + a_{n+m+1} + a_n \right) = M 2a_n.$$

יהי $\varepsilon > 0$. קים $P > 0$ כך ש $(n > P) \rightarrow (a_n < \frac{\varepsilon}{2M})$ ועבור $n > P$ מתקיים
 $|\sum_{k=n+1}^{n+m-1} a_k b_k| < \varepsilon$, ולפי תנאי קושי להתכנסות טורים הטור מתכנס.

מבחני אבל ודיריכלה עבור אינטגרלים לא אמיתיים

$$\int_a^\infty f(t)g(t)dt$$

נתון האינטגרל הלא אמיתי משפט דיריכלה אם $f(t)$ מתכנסת מונוטונית ל-0 ו $\int_a^\infty g(t)dt$ חסומה, אז

האינטגרל המקורי מתכנס.

משפט אבל אם $f(t)$ מונוטונית וחסומה ו $\int_a^\infty g(t)dt$ מתכנס, אז האינטגרל המקורי מתכנס.

דוגמא:

$$\text{האם } \int_\pi^\infty \frac{\sin t dt}{t} \text{ מתכנס?}$$

תשובה

כן על סמך משפט דיריכלה אם נגדיר $f(t) = \frac{1}{t}$, $g(t) = \sin(t)$ אז $f(t)$

מונוטונית שואפת ל-0, ומתקיים כי לכל x ,

$$\int_\pi^x \sin(t)dt = \cos(\pi) - \cos(x), \left| \int_\pi^x \sin(t)dt \right| \leq 1 + 1 = 2.$$

דוגמא

$$\text{האם } \int_\pi^\infty \frac{(t^2 - 5t + 5) \sin t dt}{t^3} \text{ מתכנס?}$$

תשובה

נגדיר $f(t) = \frac{(t^2 - 5t + 5)}{t^2}$, $g(t) = \frac{\sin t dt}{t}$, אז

$$f(t) = \frac{(t^2 - 5t + 5)}{t^2} = 1 - \frac{5}{t} + \frac{5}{t^2}, f'(t) = \frac{5}{t^2} - \frac{10}{t^3} = \frac{5t - 10}{t^3}.$$

ולכן f עולה עבור $t > 2$ וכמו כן חסומה כיון שקיים $\lim_{x \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{5}{t} + \frac{5}{t^2}) = 1$. בנוסף $\int_2^\infty \frac{\sin t dt}{t}$ מתכנס,

ואת זה ניתן להוכיח על ידי משפט דיריכלה על ידי הצבת $f_1(t) = \frac{1}{t}$, $g_1(t) = \sin t$, ולכן מתקיימים תנאי משפט אבל, האינטגרל מתכנס, f_1 עולה רק בקטע $2 < t$.

הערה ניתן לפתור את התרגיל בדרך נוספת על ידי משפט דיריכלה על ידי בחירת $f(t) = \frac{1}{t}$, $g(t) = \frac{(t^2 - 5t + 5) \sin t}{t^2}$, אולם בדיקת החסימות של $\int_2^\infty g(t) dt$ היא ארוכה יותר וכוללת אינטגרציה בחלקים.

סכום מבחני טורים

1. (מבחן הזנב) הטורים $\sum_{n=1}^\infty a_n$ ו $\sum_{n=K+1}^\infty a_n$ מתכנסים ומתבדרים כאחד, אבל לא לאותו סכום והפרש הגבולות ביניהם הוא $\sum_{n=1}^K a_n$.

2. אם $\sum_{n=1}^\infty a_n$ מתכנס אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

מבחנים לטורים חיוביים. בכל טור שכזה $\exists K$ כך ש $(n > K) \rightarrow (0 \leq a_n)$. מעתה לא נכתוב זאת יותר ונניח אמירה זו בכל סעיף. כל ההנחות תהיינה בנוסף על הנחה זו.

3 מבחן השוואה : אם $\exists M, (n > M) \rightarrow (0 \leq a_n \leq b_n)$ אז :

א. $\sum_{n=1}^\infty b_n$ מתכנס גורר כי $\sum_{n=1}^\infty a_n$ מתכנס.

ב. $\sum_{n=1}^\infty a_n$ מתבדר גורר כי $\sum_{n=1}^\infty b_n$ מתבדר.

4. מבחן השוואת הגבול : אם $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ אז :

א. $0 < L < \infty$ אז התכנסות $\sum_{n=1}^\infty b_n$ שקולה להתכנסות $\sum_{n=1}^\infty a_n$. התבדרות

$\sum_{n=1}^\infty b_n$ שקולה להתבדרות $\sum_{n=1}^\infty a_n$.

ב. $L=0$ אז התכנסות $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ גוררת התכנסות $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. התבדרות $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ גוררת התבדרות $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

ג. $L=\infty$ אז התבדרות $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ גוררת התבדרות $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. התכנסות $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ גוררת התכנסות $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

5. מבחן האינטגרל נתונה פונקציה f המקיימת כי $\exists \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

וכי $\exists M, (x > M) \rightarrow (f(x) \downarrow)$. אז התכנסות $\int_M^{\infty} f(x) dx$ שקולה

להתכנסות $\sum_{n=M}^{\infty} f(n)$, אבל הגבולות לאו דוקא שווים.

6. מבחן השואת המנות מבחן ההשוואה : אם

$$\exists M, (n > M) \rightarrow \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}\right). \text{ אז :}$$

א. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס גורר כי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

ב. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר גורר כי $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתבדר.

7. מבחן המנה של ד'אלמברט גרסת האיברים : א. קימים $q < 1$

ו- $M > 0$ כך ש- $(n > M) \rightarrow \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q\right)$. אז הטור מתכנס.

ב. קיים $M > 0$ כך ש- $(n > M) \rightarrow (1 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n})$. אז הטור מתבדר.

גרסת הגבול $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$. אז עבור א. $L < 1$ הטור מתכנס. ב. $1 < L$

הטור מתבדר. ג. $1 = L$ המבחן נכשל.

8. מבחן השרש של קושי גרסת האיברים : א. קימים $q < 1$ ו-

$M > 0$ כך ש- $(n > M) \rightarrow (\sqrt[n]{a_n} \leq q)$. אז הטור מתכנס.

ב. קיים $M > 0$ כך ש- $(n > M) \rightarrow (1 \leq \sqrt[n]{a_n})$. אז הטור מתבדר.

גרסת הגבול $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$. אז עבור א. $L < 1$ הטור מתכנס. ב. $1 < L$

הטור מתבדר. ג. $1 = L$ המבחן נכשל.

1. מבחן ראבה גרסת האיברים : א. קימים $1 < q$ ו- $M > 0$ כך

ש- $(n > M) \rightarrow (q \leq n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1))$. אז הטור מתכנס.

ב. קיים $M > 0$ כך ש- $(n > M) \rightarrow (n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) < 1)$. אז הטור מתבדר.

גרסת הגבול $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = L$. אז עבור א. $L < 1$ הטור מתבדר. ב. $1 < L$ הטור מתכנס. ג. $1 = L$ המבחן נכשל.

מבחנים עבור טורים כלליים (לא מניחים יותר שזנב הסדרה מורכב מאיברים אי שליליים).

1. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס גורר כי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

2. מבחן לייבניץ: $\exists K$ כך ש $(n > K) \rightarrow (0 \leq a_n)$. אז $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$

מתכנס לגבול L , ולכל $n > K/2$ מתקיים $S_{2n} \leq L \leq S_{2n+1}$.

3. מבחן דיריכלה: $\exists K$ כך ש $(n > K) \rightarrow (0 \leq a_{n+1} \leq a_n)$, ובנוסף

$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ובנוסף קימים $P < Q$ כך שלכל $n < m$ $P \leq \sum_{k=n}^m b_k \leq Q$.

אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

4. מבחן אבל $\exists K$ כך ש $(n > K) \rightarrow [(a_n \downarrow) \vee (a_n \uparrow)]$, ובנוסף $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

מתכנסת. אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.