שעורי אינפי ב׳ התשע״ה

שם המורה :גיורא דולה

הפונקציות האלמנטריות

הפונקציות האלמנטריות הן הפונקציות הפולינומיאליות, המעריכיות, הטריגונומטריות וכן כל פונקציה שמתקבלת מהן על ידי חבור חסור כפל חלוק הרכבה והפוך.

נגזרות הפונקציות האלמנטריות

כל הפונקציות האלמנטריות (רציפות) וגזירות בכל תחום הגדרתן ומקיימות את החוקים הבאים :

1. $(x^a)'=ax^{a-1}$ 2. $(a^x)'=a^x\ln(a)$ 2'. $(e^x)'=e^x$ 3. $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln(a)}$ 3' $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.

4. $(\sin x)'=\cos x$. 5. $(\cos x)'=-\sin x$ 6. $(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

7. $(\cot x)'=\dfrac{-1}{\sin^2 x}$ 8. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

9. $(\arccos x)'=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ 10. $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$ 11. $(\mathrm{arc}\cot x)'=\dfrac{-1}{1+x^2}$

כלל השרשרת

נניח כי נתונה פונקציה שהיא תוצאת הרכבה $(g\circ f)(x)=g(f(x))$

ונניח כי f גזירה בנקודה a וכי g גזירה בנקודה f(a). אז g°f גזירה בנקודה f(a) ומקימת את כלל השרשרת.

הנסוח של ניוטון $(g\circ f)'(a)=g'(f(a))f'(a)$

נניח כי f פונקציה מציר x לציר y , ו כי g פונקציה מציר y לציר z , אז לייבניץ סימן את f' בסימן $\dfrac{dy}{dx}$, את g' בסימן $\dfrac{dz}{dy}$, ואת (g°f)' בסימן $\dfrac{dz}{dx}$,

אז כלל השרשרת בסימון של לייבניץ הוא $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{dz}{dy}\dfrac{dy}{dx}$. נשתמש בגזירה בסימון של ניוטון ובשיטת ההצבה באינטגרלים, בסימון של לייבניץ.

דוגמא

$$e^{5x}=g(f(x)),g(x)=e^x,f(x)=5x,g'(x)=g(x),f'(x)=5,g'(f(x))=e^{5x},(e^{5x})'=e^{5x}5.$$

דוגמא

arcsin(x) היא פונקציה הפוכה לפונקציה sin(x) ולכן לפי הגדרת פונקציות הפוכות מתקיים arcsin(sin(x))=x. נגזור את שני האגפים, באגף שמאל נשתמש בכלל השרשרת ונקבל arcsin'(sin(x))cos(x)=1 , ולכן . נסמן sin(x)=a. $\cos(x)=\sqrt{1-\sin^2(x)}=\sqrt{1-a^2}$, ולכן נקבל את מה שכתוב בטבלה $\arcsin'(a)=\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}$

גזירה לוגריתמית

ישנן פונקציות מעריכיות שבהן המשתנה x מופיע גם בבסיס וגם במעריך. אי אפשר לגזור אותן לפי כלל 1, ששם המעריך קבוע, וגם לא לפי כלל 2 ששם הבסיס קבוע. נאלץ להשתמש בתחבולה. כידוע פונקצית החזקה והפונקציה הלוגריתמית הפוכות זו לזו, והרכבתן זו על זו היא פונקצית הזהות, ולכן $f(x)^{g(x)}=e^{\ln(f(x)^{g(x)})}=e^{g(x)\ln(f(x))}$. נגזור ונשוה את שני האגפים כאשר נתיחס לאגף ימין כאל פונקציה מורכבת שבה החיצונית היא e^x והפנימית היא המכפלה $g(x)\ln(f(x))$. ולכן נקבל

$$[f(x)^{g(x)}]'=e^{g(x)\ln(f(x))}[g'(x)\ln(f(x))+\frac{g(x)f'(x)}{f(x)}]=f(x)^{g(x)}[g'(x)\ln(f(x))+\frac{g(x)f'(x)}{f(x)}]$$

דוגמא

גזור את x^x. נציב בנוסחה f(x)=g(x)=x ונקבל

$$(x^x)'=x^x[1\ln(x)+\frac{x1}{x}]=x^x(\ln(x)+1).$$

כללי l'hospital

נתון הגבול $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$. כלל ל'הופיטל מאפשר לחשב את הגבול במקרים $\frac{0}{0}$ ו $\frac{\infty}{\infty}$ תוך שמוש בנגזרות. הכלל הוא $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

חלק מהגבולות שקבלנו בסמסטר א כנתונים, נובעים למעשה מכלל ל'הופיטל.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\cos(x)}{1}=1\ ,\ \lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x}{1}=1\ ,\ \lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=1\ ,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=\frac{2}{\infty}=0$$

הרחבת כללי ל׳הופיטל עבור המקרה 0∞

במקרה זה נשתמש בעובדה כי $x=\frac{1}{1/x}$, ונציג $0\infty=\frac{\infty}{1/0}=\frac{\infty}{\infty}$, או $0\infty=\frac{0}{1/\infty}=\frac{0}{0}$ נפעיל את כלל ל׳הופיטל על הבטוי הנוח יותר לגזירה.

דוגמא :

$\lim_{x\to\infty}xe^{-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x}}{1/x}$ במקרה זה קל יותר לגזור את הראשון מהבטויים וכך נמשיך. $\lim_{x\to\infty}xe^{-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=\frac{1}{\infty}=0.$

הרחבת כללי ל׳הופיטל עבור המקרים $1^\infty,\infty^0,0^0$

במקרה זה נשתמש בעובדה כי $e^{\ln x}=x$, ולכן $e^{\ln f^g}=e^{g\ln f}$, ונשים לב כי עבור המקרה של 1^∞, נקבל כי $g\ln(f)=\infty\ln(1)=\infty0$, עבור המקרה של 0^0, נקבל כי $g\ln(f)=0\ln(0)=0(-\infty)$, ועבור המקרה של ∞^0, נקבל כי $g\ln(f)=0\ln(\infty)=0\infty$, כלומר gln(f) בכל מקרה הופך להיות המקרה 0∞ וכעת נוכל להמשיך כמקודם.

דוגמא :

חשב את $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=1^\infty$. פתרון נפעיל את הטריק הכתוב ונקבל כי

$$(1+\frac{1}{n})^n=e^{\ln((1+\frac{1}{n})^n)}=e^{n\ln(1+\frac{1}{n})},\lim_{n\to\infty}n\ln(1+\frac{1}{n})=\infty0,n\ln(1+\frac{1}{n})=\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}},n\ln(1+\frac{1}{n})=\frac{n}{\frac{1}{\ln(1+\frac{1}{n})}}.$$

מבין שתי האופציות נעדיף את הראשונה אשר שואפת ל 0/0, ונמשיך

$$\lim_{n\to\infty}n\ln(1+\frac{1}{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{-1}{\ln(1+\frac{1}{n})n^2}}{\frac{-1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\ln(1+\frac{1}{n})}}{1}=1,\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e^1=e$$

שמושי נגזרות לחקירת פונקציות.

להלן תכונות של פונקציות אשר חלק מהן נוכיח אח״כ.

1. נתון קטע (a,b) אשר בו f מוגדרת גזירה ומתקיים כי $f'>0$. אז f עולה בקטע (a,b).

2. נתון קטע (a,b) אשר בו f מוגדרת גזירה ומתקיים כי $f'<0$. אז f יורדת בקטע (a,b).

3. נתון קטע (a,b) אשר בו f מוגדרת גזירה ונתונה נקודת קיצון מקומי c. אז $f'(c)=0$.
4. נתון קטע (a,b) אשר בו f מוגדרת גזירה פעמיים ומתקיים כי $f''>0$. אז f קמורה (מחייכת, קמורה כלפי מעלה) בקטע (a,b).
5. נתון קטע (a,b) אשר בו f מוגדרת גזירה פעמיים ומתקיים כי $f''<0$. אז f קעורה (בוכה, קמורה כלפי מטה) בקטע (a,b).

הגדרה: נקודת פתול היא נקודה בתחום ההגדרה שבה מתקיים כי f קמורה מצד אחד וקעורה מצד שני.

6. נתון קטע (a,b) אשר בו f מוגדרת גזירה פעמיים ונתונה נקודת פתול c. אז $f''(c)=0$.

דוגמאות

1. $y=2x+3$ עולה בכל תחום הגדרתה, ואכן $y'=2>0$.
2. $y=-3x+4$ יורדת בכל תחום הגדרתה ואכן $y'=-3<0$.
3. עבור $a>0$ נביט ב $y=ax^2+bx+c$, אז $y'=2ax+b$, ו $y''=2a>0$, ואכן y'' חיובי ו-y מחייכת תמיד. $y'>0$ שקול ל $x>-b/2a$, כלומר y עולה החל מנקודת הקדקד, ויורדת עד הקדקד.
4. נביט על $y=x^3-3x$, אז $y'=3x^2-3=3(x-1)(x+1), y''=6x$. כעת נחלק את הישר הממשי ע״י הוספת הנקודות ± 1 בהן y' מתאפסת, והנקודה 0 בה y'' מתאפסת ונקבל את טבלת הסימנים (רבי יהודה) של y',y''.

הערה חשובה: בדרך כלל יש גם להוסיף לישר הממשי גם את הנקודות בהן y',y'' לא מוגדרות ובמקרה שלנו אין נקודות כאלו.

קבלנו 4 קטעים, $(-\infty,-1)(-1,0)(0,1)(1,\infty)$, ולכל אחד מהם נבחר נציג. 2- יכול להיות נציג של $(-\infty,-1)$, 0.5- של $(-1,0)$,

0.5 של (0,1) ו-2 של (1,∞). את הנציגים נציב ב-"y',y ונקבל את טבלת הסימנים הבאה:

	(-∞,-1)	(-1,0)	(0,1)	(1,∞)
סימן של y'	+	-	-	+
סימן של y''	-	-	+	+
התנהגות y	עולה ובוכה	יורדת ובוכה	יורדת ומחייכת	עולה ומחייכת

טבלה שכזו היא חלק חשוב בחקירה המלאה.

אסימפטוטה.

אסימפטוטה היא קו ישר אשר הפונקציה 'נדבקת' אליו. בדיחה: זהו ישר שהולך עם עקומה ולא נוגע בה. כיון שעוסקים בקוים ישרים יש לרשום את משואות כל הקוים הישרים במישור. המשואה y=mx+n נותנת את כל הפונקציות שהן בעלות גרף שהוא ישר. m הוא השפוע. לכזה קו נקרא ישר משופע. המשואה x=b היא משואה של קו אנכי במישור. קו זה איננו משופע ואיננו גרף של פונקציה. ישר כזה יקרא ישר אנכי. לכן נבדיל בין אסימפטוטה אנכית (שהיא קו אנכי) ובין אסימפטוטה משופעת (שהיא קו משופע).

אסימפטוטה אנכית.

הישר x=c הוא אסימפטוטה אנכית של הגרף של y=f(x), אם מתקיימים שני תנאים. קודם כל הערך x=c איננו בתחום ההגדרה של f. בנוסף מתקים אחד לפחות מ-4 הגבולות הבאים $1)\lim_{x\to c-} f(x)=\infty, 2)\lim_{x\to c-} f(x)=-\infty, 3)\lim_{x\to c+} f(x)=-\infty, 4)\lim_{x\to c+} f(x)=\infty$ את תנאי הגבולות ניתן לכתוב בקיצור כך $\lim_{x\to c\pm} f(x)=\pm\infty$

דוגמאות

x=0 היא אסימפטוטה אנכית של y=1/x .
x=0 היא אסימפטוטה אנכית של $y=1/x^2$

x=0 איננה אסימפטוטה אנכית של $y=x^2/x$ למרות שx=0 לא בתחום ההגדרה, כיון שאף אחד מ 4 הגבולות לא מתקיים.

אסימפטוטה משופעת ב∞

הישר y=mx+n הוא ישר האסימפטוטה המשופעת ב∞, אם מתקיים $m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}, n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]$.

אסימפטוטה משופעת ב∞-

הישר y=mx+n הוא ישר האסימפטוטה המשופעת ב∞-, אם מתקיים $m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}, n=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-mx]$.

ידוע שעבור פונקציה רציונלית $\frac{p(x)}{q(x)}$, כאשר p(x) ו-q(x) הם פולינומים, מתקיים כי y=mx+n היא ישר אסימטוטה משופעת ב∞, אם ורק אם הוא ישר אסימפטוטה משופעת ב ∞-, כלומר בפונקציה שכזו מספיק לבדוק את האסימפטוטה המשופעת רק בצד אחד.

דוגמא:

מצא את כל האסימטוטות של $y=\frac{x^2+8}{x+1}$

תשובה: הנקודת היחידה שאיננה בתחום ההגדרה של y היא x=-1. מתקיים $\lim_{x\to-1+}\frac{x^2+8}{x+1}=\frac{+}{0+}=\infty$, $\lim_{x\to-1-}\frac{x^2+8}{x+1}=\frac{+}{0-}=-\infty$ כלומר אכן זהו ישר אסימטוטה אנכי של f. בנוסף

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+8}{x+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+8}{(x+1)x}=1, n=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+8}{x+1}-1x=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+8-x^2-x}{x+1}=-1$$

כלומר y=1x-1=x-1 הוא אסימפטוטה משופעת ב∞. אין צורך לבדוק ב∞-, כי כיון שזוהי פונקציה רציונלית,מנת שני פולינומים, הרי שאותה אסימפטוטה משופעת נכונה גם ב∞+ וגם ב∞-

דוגמא:

מצא את כל האסימפטוטות של $y=\sin(x)$.

כיון שתחום ההגדרה של הפונקציה הוא כל R, אין אסימטוטה אנכית. עבור אסימטוטה משופעת נחשב ונקבל:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin(x)}{x},\frac{-1}{x}\le\frac{\sin(x)}{x}\le\frac{1}{x},\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0,\lim_{x\to\infty}\frac{\sin(x)}{x}=0=m,n=\lim_{x\to\infty}\sin(x)-0x=\lim_{x\to\infty}\sin(x)$$

הגבול שמגדיר את n לא קים, כי למשל הסדרה $x_k=k\Pi$ מקיימת שהיא שואפת לאינסוף וסדרת ה-y שלה היא 0, ולעומתה הסדרה $y_k=(4k+1)\Pi/2$ מקיימת שהיא שואפת לאינסוף וסדרת ה-y שלה היא 1. אותן תשובות מתקבלות כאשר x שואף ל ∞- בכך קבלנו דוגמא לפונקציה חסרת אסימטוטות בכלל, וכך שבחשוב האסימטוטה המשופעת שלה, m קים ומוגדר אבל n לא קים.

דוגמא:

מצא את כל האסימפטוטות של $y=e^x$.

כיון שתחום ההגדרה של הפונקציה הוא כל R, אין אסימטוטה אנכית. עבור אסימטוטה משופעת נחשב ונקבל:

$m=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{1}=\infty$. כיון שm לא קים, אין אסימפטוטה משופעת ב∞. עבור ∞-, נקבל

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}=\frac{0}{\infty}=0,n=\lim_{x\to-\infty}e^x-0x=\lim_{x\to-\infty}e^x=0$$

כלומר $y=0$ אסימטוטה משופעת (למעשה עם שפוע 0 ולכן אפקית) ב∞-. כלומר קבלנו פונקציה (שאיננה פונקציה רציונלית) שיש לה אסימפטוטה משופעת במינוס אינסוף ואין לה אסימפטוטה משופעת באינסוף.

המשפטים של החשבון הדיפרנציאלי.

הגדרה: מקסימום מקומי, מינימום מקומי, קיצון מקומי. נתונה פונקציה f, ומספרים b, ו $a>0$ כך שהקטע $(b-a,b+a)$ הוא בתחום ההגדרה של f. נגיד כי ב-b יש מקסימום מקומי של f, אם לf המצומצמת לקטע $(b-a,b+a)$ יש מקסימום בנקודה b. נגיד כי יש לה מינימום מקומי אם לf המצומצמת יש מינימום

ב-b , נגיד כי ל-f יש קיצון מקומי ב-b אם יש לה מקסימום מקומי או מינימום מקומי.
משפט פרמה. Fermat

נתונות פונקציה f ונקודות קיצון מקומי b ונתון כי f'(b) מוגדרת. אז f'(b)=0.

הוכחה

נוכיח עבור מקסימום מקומי בלבד. ההוכחה למינימום מקומי דומה. נשתמש בהגדרת הנגזרת: מתקיים הגבול $f'(b)=\lim_{h\to 0}\frac{f(b+h)-f(b)}{h}$. והוא שווה לגבול מימין ומשמאל.
נשתמש בגבול מימין. אז h>0, ולפי תכונות המקסימום (עבור 0<h<a) מתקיים $f(b+h)\le f(b)$, ולכן המונה בגבול מקיים $f(b+h)-f(b)\le 0$, המכנה חיובי ולכן המנה $\frac{f(b+h)-f(b)}{h}$ היא קטנה או שוה ל-0, והגבול מימין קטן או שוה ל-0. הגבול משמאל הוא גבול של בטויים שבהם המונה קטן או שוה ל-0, המכנה שלילי, לכן המנה אי שלילית והגבול אי שלילי. אז הגבול, שהוא גבול מימין ומשמאל הוא גם גדול או שוה וגם קטן או שוה ל-0, ולכן הוא 0. ■

משפט רול Rolle

נתונה פונקציה f אשר מוגדרת בקטע [a,b], רציפה בכל נקודות הקטע, וגזירה בכל נקודות הקטע הפתוח (a,b), ונתון כי f(a)=f(b). אז קימת לפחות נקודה אחת c, כך ש a<c<b וכך ש f'(c)=0.

הערה. יכולות להיות שתי נקודות כאלו או שלוש. לא אומרים איך למצוא את c.

הוכחה

כיון ש-f רציפה בקטע סגור, אז לפי משפט וירשטרס יש נקודה c בקטע הסגור [a,b] שבה מתקבל המקסימום של f על הקטע.
אם c בקטע הפתוח, כלומר $c\neq a, c\neq b$, אז לפי ההגדרה c היא נקודת מקסימום מקומי ולכן לפי משפט פרמה נובע כי f'(c)=0, והוכחנו את הטענה. יש גם לפי משפט וירשטרס נקודה d שבה

ל-f יש את ערך המינימום בקטע. אם $d\neq a, d\neq b$ נובע כי d היא נקודת מינימום מקומי ושוב לפי משפט פרמה נובע כי $f'(d)=0$, והסתיימה ההוכחה.
נותר להוכיח את המשפט רק עבור המקרה שבו c,d הן בקצות הקטע. המקסימום והמינימום של f הם f(a) ו f(b). אבל נתון כי $f(a)=f(b)$, ולכן נובע כי f היא הפונקציה הקבועה. אבל אז $f'=0$ בכל נקודות הקטע [a,b], וברור שהיא מקיימת את המשפט. ■

משפט ערך הבינים של לגרנג׳ Lagrange

נתונה פונקציה f אשר מוגדרת בקטע [a,b], רציפה בכל נקודות הקטע, וגזירה בכל נקודות הקטע הפתוח (a,b) אז קימת לפחות נקודה אחת c, כך ש $a<c<b$ וכך ש $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

הערה. יכולות להיות שתי נקודות כאלו או שלוש. לא אומרים איך למצוא את c. כמו כן אם נציב את הנתון $f(b)=f(a)$, נקבל כי $f'(c)=0$, כלומר משפט לגרנג׳ הופך להיות המשפט של רול.

הוכחה

גם הוכחת משפט לגרנג׳ מסתמכת על המשפט של רול. אנו לוקחים את הנתון על f, ומנסים לשנות את המצב כדי לקבל נתונים כמו במשפט רול. נגדיר $k(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$.
אז k היא פונקציה ממעלה ראשונה, ולכן הגרף שלה הוא קו ישר. על ידי הצבה רואים כי $k(a)=f(a),k(b)=f(b)$, כלומר הקו הישר שהוא הגרף של k, מתלכד עם הגרף של f בנקודות הקצה a,b. ברור כי k היא פונקציה רציפה בקטע [a,b] וגזירה בכל נקודות הקטע הפתוח (a,b). נגדיר כעת $h(x)=f(x)-k(x)$. אז h היא הפרש של שתי פונקציות רציפות בקטע הסגור ולכן גם היא כזו, והיא הפרש של שתי פונקציות גזירות בקטע הפתוח ולכן גם היא כזו, ולפי הבניה $h(a)=f(a)-k(a)=0$ $h(b)=f(b)-k(b)=0$, ולכן h מקיימת את תנאי משפט רול ולכן יש נקודה c אחת לפחות שבה מתקיים $h'(c)=0$.
לפי ההגדרה $h'=f'-k'=f'-(f(b)-f(a))/(b-a)$, כלומר קיימת c אחת לפחות כך ש $f'(c)-(f(b)-f(a))/(b-a)=0$, כדרוש. ■

קטעי עליה

נניח כי נתונים פונקציה f מוגדרת ורציפה בכל נקודות הקטע $[a,b]$, ולכל x, כך ש$a<x<b$ מוגדרת $f'(x)$ ומתקיים כי $f'(x)>0$.
אז $[a,b]$ קטע עליה של f.

הוכחה

תהינה נתונות נקודות p,q כך ש $a<p<q<b$, צ״ל כי $f(p)<f(q)$.
נשים לב כי תנאי משפט לגרנג׳ קימים בקטע $[p,q]$, כי f רציפה בקטע הסגור וגזירה בפתוח. אז לפי מסקנת משפט לגרנג׳ קימת c אחת לפחות כך ש $p<c<q$ וכך ש $f'(c)=\frac{f(q)-f(p)}{q-p}$. לפי ההנחה $f'(c)>0$, ולכן המנה $\frac{f(q)-f(p)}{q-p}$. היא חיובית. כיון שהמכנה חיובי לפי הנתון, גם המונה חיובי כדרוש. ■

קטעי ירידה

נניח כי נתונים פונקציה f מוגדרת ורציפה בכל נקודות הקטע $[a,b]$, ולכל x, כך ש$a<x<b$ מוגדרת $f'(x)$ ומתקיים כי $f'(x)>0$.
אז $[a,b]$ קטע עליה של f.

ההוכחה דומה מאוד להוכחת הטענה הקודמת.

משפט ערך הבינים של קושי Cauchy

נתונים הקטע $[a,b]$, ופונקציות g,f, אשר מוגדרות ורציפות בכל נקודות הקטע, וגזירות בכל נקודות הקטע הפתוח (a,b), וכך שלכל $x,a<x<b$ מתקיים $g'(x)>0$. אז קימת לפחות נקודה אחת c, כך ש $a<c<b$ וכך ש $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$.

הערה. יכולות להיות שתי נקודות כאלו או שלוש. לא אומרים איך למצוא את c. כמו כן אם נציב את הנתון $g(x)=x$, נקבל כי

$g(a)=a, g(b)=b, g'(c)=1$, כלומר משפט ערך הבינים של קושי הופך להיות משפט ערך הבינים של לגרנג׳.

הוכחה

נכליל את הוכחת משפט ערך הבינים של לגרנג׳, נביט בפונקציה h אשר הוגדרה שם, וכל אות של משתנה או של קבוע נחליף בערך של g באותה נקודה. כלומר במקום

$h(x)=f(x)-k(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a)$ נביט על

$h(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))-f(a)$. קודם כל נשים לב כי

לפי טענה קודמת נובע כי $g(b)>g(a)$ ולכן $g(b)-g(a)>0$.

חבור חסור כפל או חלוק בקבוע משאירים פונקציה רציפה רציפה, ומשאירים פונקציה גזירה גזירה, ולכן

$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))+f(a)$ מתקבלת מg על ידי חסור כפל וחלוקה בקבועים, ולכן היא פונקציה רציפה בקטע הסגור וגזירה בפתוח. גם f רציפה בקטע הסגור וגזירה בפתוח ולכן כיון שחסור פונקציות רציפות היא רציפה וחסור שתי פונקציות גזירות היא גזירה, נובע כי h היא פונקציה רציפה ב $[a,b]$ וגזירה ב (a,b). כמו כן לפי הנתון $h(a)=h(b)=0$, ולכן מתקיימים תנאי משפט רול, ולכן לפי מסקנת משפט רול קימת c אחת לפחות כך ש $a<c<b$ וכך ש $h'(c)=0$. לפי הגדרת הנגזרת נובע כי $h'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c)=0$ או על ידי העברת אגפים

$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$, כדרוש. ■

כלל ל׳הופיטל עבור 0/0 בנקודה סופית

נתונים קטע $[a,b]$ ופונקציות f,g אשר מוגדרות רציפות וגזירות בקטע (a,b) וכך שמתקיים $\lim_{x\to b}f(x)=\lim_{x\to b}g(x)=0$ ו$g'>0$. אז מתקיים כי $\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to b}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

הוכחה

כיון שמתקיים $\lim_{x\to b} f(x)=\lim_{x\to b} g(x)=0$, ניתן להרחיב את תחום ההגדרה של f ושל g לקטע הסגור [a,b] על ידי זה שנגדיר f(b)=g(b)=0. אז מתקיים לפי משפט ערך הביניים של קושי שיימת נקודה c אחת לפחות, x<c<b כך שמתקיים השויון $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-0}{g(x)-0}=\frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$ ולכן $\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to b, x<c<b}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{c\to b}\frac{f'(c)}{g'(c)}$, כדרוש. ■

===========בשנת תשע״ד הספקנו את החומר הקודם באינפי א ושעורי אינפי ב התחילו מכאן============

אינטגרלים.

נביט על מושג הפונקציה. זהו תהליך אשר לכל x בתחום ההגדרה מתאים y בתמונה. נביט על תהליך חשוב הנגזרת. זהו תהליך אשר בו 'לכל' פונקציה (רק לפונקציות גזירות) מתאימה פונקציה חדשה שהיא הנגזרת שלה. זוהי פונקציה שהמשתנים שלה הם פונקציות. מכיון שלא רוצים להשתמש במושג פונקציה גם עבור הקלט, גם עבור הפלט וגם עבור התהליך, אז משתמשים במילה אופרטור, ואומרים כי אופרטור הגזירה מעביר את הונקציה f לפונקציה 'f.

האם האופרטור הוא חח״ע? לא כי $(x^2+5)'=(x^2+8)'=2x$, אבל אפשר להוכיח כי כמות הפונקציות שיש להן אותה נגזרת היא מוגבלת.

טענה

נתונה פונקציה רציפה וגזירה על הישר הממשי f ואשר מקיימת כי f'=0. אז ישנו קבוע d כך ש f≡d.

הוכחה

נבחר a,b כלשהם בתחום ההגדרה, אז קימת c אחת לפחות כך ש $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$. לפי הנתון f'(c)=0 ולכן המונה האחרון הוא 0, כלומר לכל a,b מתקיים f(a)=f(b) כלומר f קבועה. ■

טענה

נתונות שתי פונקציות גזירות על הישר f,g כך ש $f'=g'$. אז קים קבוע d כך ש $g\equiv f+d$.

הוכחה.

נביט על $g-f$ המקיימת כי $(g-f)'=0$, אז לפי הטענה הקודמת קים קבוע d כך ש $g-f\equiv d$ או כדרוש $g\equiv f+d$ ■

בלשון של אלגברה לינארית, אופרטור הגזירה היא העתקה לינארית, והגרעין שלה Ker הוא תת המרחב של כל הפונקציות הקבועות.

כיון שאופרטור הגזירה (כמעט) חד חד ערכי, יש לו אופרטור הפוך אשר נקרא אופרטור האינטגרל הבלתי מסוים (ולפעמים אופרטור הקדומה), המסומן על ידי האות S מסולסלת, ואשר מוגדר על ידי $[(g)'=f]\leftrightarrow[\int f(x)dx=g(x)+c]$. נשים לב כי האופרטור החדש מוגדר עד כדי תוספת קבוע, כיון שאכן אופרטור הגזירה איננו חח״ע. האותיות dx מבטאות בינתיים רק סימונים.

כיון שאופרטור האינטגרל הבלתי מסויים הוא הפוך (במובן מסוים) של אופרטור הגזירה, הרי שהרבה מחוקי הגזירה יוצרים חוקים של אינטגרל בלתי מסוים:

משפטי קיום

1. נתונה פונקציה f המוגדרת ורציפה על הקטע $[a,b]$. אז קימת לה קדומה g באותו קטע. (בלי הוכחה)

הגדרה

נתונה פונקציה f המוגדרת על הקטע $[a,b]$. אז נגיד כי היא רציפה למקוטעין על הקטע, אם יש קטעים $[a_1,b_1],[a_2,b_2],\ldots,[a_n,b_n]$ אשר אחודם הוא הקטע $[a,b]$, כך שf רציפה על כל תת קטע, וכך שבין כל שני תתי קטעים ל-f יש נקודת אי רציפות מסוג קפיצה.

2. נתונה פונקציה f המוגדרת ורציפה למקוטעין על הקטע [a,b]. אז קימת לה קדומה g באותו קטע. 'g שוה ל f בכל נקודות הרציפות של f ו 'g לא מוגדרת בנקודות אי הרציפות של f. (בלי הוכחה).

3. נתונה פונקציה f המוגדרת ומונוטונית (עולה או יורדת) על הקטע [a,b]. אז קימת לה קדומה g באותו קטע. 'g שוה ל f בכל נקודות הרציפות של f ו 'g לא מוגדרת בנקודות אי הרציפות של f.(בלי הוכחה)

חוקי האינטגרל הבלתי מסוים :

$$1.\int (f(x)\pm g(x))dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx, 2.\int cf(x)dx=c\int f(x)dx.$$

$$3.\int f'(x)g(x)dx=f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)dx. 4.\int g'(f(x))f'(x)dx=g(f(x))+c.$$

כאשר בכלל 2 c מסמן קבוע, כלל 3 נקרא אינטגרציה בחלקים, וכלל 4 נקרא כלל ההצבה.

אינגרלים של פונקציות אלמנטריות

$$1.\int x^a dx=\frac{x^{a+1}}{a+1}+c, a\neq -1, 2.\int \frac{1}{x}dx=\int\frac{dx}{x}=\frac{\log_a x}{\log_a e}+c=\ln a\log_a x+c, 2'.\int\frac{dx}{x}=\ln x+c.$$

$$3.\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+c=\log_a e a^x+c. 3'\int e^x dx=e^x+c. 4.\int \sin x dx=-\cos x+c,$$

$$5.\int \cos x dx=\sin x+c, 6.\int \tan x dx=-|\ln(\cos x)|+c, 7.\int \cot x dx=|\ln(\sin)|+c,$$

$$8.\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+c=-\arccos x+c, 9.\int\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x+c=-\operatorname{arc\,cot} x+c,$$

אינטגרלים שפה קשה
לכל מכפלת/מנת פונקציות אלמנטריות יש נגזרת שהיא חבור חסור כפל וחלוק של הכופלים או האיברים במנה. לעומת זאת אין נוסחה טובה לאינטגרל של מכפלת/מנת פונקציות. בנוסף כל נגזרת של פונקציה אלמנטרית היא פונקציה אלמנטרית. לעומת זאת כל פונקציה אלמנטרית היא רציפה, ולכן יש לה קדומה, אבל הקדומה איננה בהכרח פונקציה אלמנטרית.

לדוגמא, פונקצית הפעמון של גאוס $e^{\frac{-x^2}{2}}$, הקדומה שלה יכלה לעזור לנו לחשב הסתברויות של התפלגות נורמלית, אך כיון שהיא איננה אלמנטרית, נאלצים לחשב הסתברויות כאלה מתוך טבלאות או בעזרת חישוב נומרי.

דוגמאות לחשובי אינטגרלים
אינטגרל 'מידיי'

$$\int (4\sqrt{x}+7\sqrt[3]{x}-5\cdot 3^x-\frac{6}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{8}{1+x^2})dx=4\int x^{\frac{1}{2}}dx+7\int x^{\frac{1}{3}}dx-5\int 3^x dx-6\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$-8\int \frac{dx}{1+x^2}=4\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+7\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}-5\frac{3^x}{\ln 3}+6\arccos x+8\operatorname{arc}\cot x+c=$$

$$=8\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3}+21\frac{x^{\frac{4}{3}}}{4}-5\frac{3^x}{\ln 3}+6\arccos x+8\operatorname{arc}\cot x+c\gamma$$

שיטת האינטגרציה בחלקים

נביט בדוגמא הבאה

$$\int x\cdot e^x dx=?$$

$$\int e^x\cdot x dx=?$$

$$\int f'(x)g(x)dx=f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)dx=$$

כלומר, לא ברור איזו אופציה טובה יותר בנוסחא, האם $f'(x)=x,e^x$ ובהתאמה האם $g(x)=e^x,x$. נטסה את שתי האפשרויות ונבדוק את הטובה יותר.

אפשרות א

$$f'(x)=x,g(x)=e^x\to f(x)=\frac{x^2}{2},g'(x)=e^x\to\int x\cdot e^x dx=\frac{x^2}{2}e^x-\int\frac{x^2}{2}\cdot e^x dx.$$

אפשרות ב

$$f'(x)=e^x,g(x)=x\to f(x)=e^x,g'(x)=1\to\int e^x\cdot x dx=e^x x-\int e^x\cdot 1dx.$$

ברור כי האופציה השניה עדיפה כיון שהפולינום x הפך להיות הפולינום 1, ולכן אין לנו יותר מכפלה. לעומת זאת באופציה

הראשונה, לאחר השמוש בנוסחא, עדין חיבים לחשב אינטגרל של מכפלה, ולכן נסיים את התרגיל בדרך השניה:

$$f'(x)=e^x, g(x)=x \to f(x)=e^x, g'(x)=1 \to \int e^x \cdot xdx = e^x x - \int e^x \cdot 1dx,$$
$$\int e^x \cdot xdx = e^x x - \int e^x \cdot 1dx = e^x x - e^x + c$$

עוד דוגמא

$$\int x^2 \cdot \sin xdx = -x^2 \cdot \cos x + 2\int x \cdot \cos xdx = -x^2 \cdot \cos x + 2(x\sin x - \int \sin xdx) =$$
$$= -x^2 \cdot \cos x + 2x\sin x + 2\cos x + c.$$

עוד דוגמא

$$I = \int \cos x \cdot e^x dx = e^x \cos x - \int (-\sin x) \cdot e^x dx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int \cos x \cdot e^x dx. 2I = e^x \cos x + e^x \sin x,$$
$$\int \cos x \cdot e^x dx = 0.5(e^x \cos x + e^x \sin x) + c.$$

שיטת ההצבה

$\int g'(f(x)) f'(x)dx = g(f(x)) + c.$ בנוסחה זו אי אפשר להתקדם בלי שמזהים את f ואת 'f ומצד שני ברגע שמזהים אותם נשאר לנו תרגיל אינטגרציה פשוט לחשב את g מתוך 'g.

דוגמא

נביט בתרגיל $\int 2x\sqrt{1+x^2}dx$. אז רואים כי אם נציב $f(x)=1+x^2$, אז ינבע כי $f'(x)=2x, g'(x)=\sqrt{x}$ ולכן רק צריך לחשב את g , ואכן נקבל $g(x)=\frac{x^{3/2}}{3/2}=\frac{2\sqrt{x^3}}{3}+c, g(f(x))=\frac{2\sqrt{(1+x^2)^3}}{3}+c$.

צורת הכתיבה של לייבניץ

מסתבר כי צורת סימון האינטגרל של לייבניץ ממש נוחה לשמוש בשיטת ההצבה. נסמן $u=f(x)=1+x^2$, וכמובן $u'=f'=2x$, אבל לייבניץ מסמן נגזרת אחרת ונקבל

$$\frac{du}{dx}=2x \to du = 2xdx, \int 2x\sqrt{1+x^2}dx = \int \sqrt{1+x^2}\,2xdx = \int \sqrt{u}du = \frac{u^{3/2}}{3/2}+c =$$
$$\frac{2\sqrt{u^3}}{3}+c = \frac{2\sqrt{(1+x^2)^3}}{3}+c$$

עוד דוגמא

$$\int \frac{dx}{x\ln(x)\ln(\ln(x))} = ?, u = f(x) = \ln(\ln(x)), f'(x) = \frac{1}{x\ln(x)}, \int = \int \frac{dx}{x\ln(x)\ln(\ln(x))}, g'(u) = \frac{1}{u},$$
$$g(u) = \ln(u) + c, g(f(x)) = \ln(\ln(\ln(x))) + c.$$

אותה דוגמא בכתיבה של לייבניץ

$$\int \frac{dx}{x\ln(x)\ln(\ln(x))} = ?, u = f(x) = \ln(\ln(x)), du = \frac{dx}{x\ln(x)} \int \frac{dx}{x\ln(x)u} = \int \frac{du}{u} = \ln(u) + c = \ln(\ln(\ln(x))) + c$$

דוגמא נוספת

$$\int \frac{(2x^7 - x^6 - 2x^5 + x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 5)dx}{x^4 - 1} = ?$$
$$\frac{x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}{x^3 + x} = x^2 + x + \frac{1}{x} + \frac{-x+1}{x^2+1}$$

שברים אלגבריים

נביט למשל בתרגיל . $\int \frac{(2x^7 - x^6 - 2x^5 + x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 5)dx}{x^4 - 1} = ?$ עכשיו רוצים ללמוד את הדרך לפתור כזה תרגיל. זהו אלגוריתם פשוט אבל ארוך, שאמור לפתור כל אינטגרל מהצורה $\int \frac{p(x)dx}{q(x)} = ?$ כאשר p(x),q(x) הם פולינומים ושאותו נציג כעת.
האלגוריתם הוא אלגברי בלבד וניתן לעשות אותו גם אם ללא קשר לחשוב אינטגרלים כלל.

שלב א רק למקרה שבו deg(q(x))≤deg(p(x))

אם קורה ש deg(p(x))<deg(q(x)), אז עוברים ישר לשלב ב.
במקרה זה מתבצע חלוק פולינומים עם שארית שדומה (קצת יותר מסובך) לחלוקת מספרים שלמים.

דוגמא : 7/3. המספר הקטן או שוה ל7 ואשר מתחלק ב3 הוא 6. 6/3=2. לכן תוצאת החלוק היא מנה 2, ושארית 7-6=1.

תרגיל יותר פשוט:

$$\frac{x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}{x^3 + x} = x^2 + x + \frac{1}{x} + \frac{1-x}{x^2+1}$$

כעת נביט על התרגיל $\frac{2x^7-x^6-2x^5+x^4+2x^3-x^2-2x+5}{x^4-1}$ ונשים לב כי קשה לבצע את החלוק במקום זה נבצע את החלוק $\frac{2x^7}{x^4}=2x^3$, וכעת נשתמש במנה (הזמנית) $2x^3$ כדי לכפול את המכנה $2x^3(x^4-1)=2x^7-2x^3$ ולחסר מהמונה. זהו סופו של שלב ראשון שאותו נכתוב בקצור

$$\begin{array}{rl}
 & 2x^3 \\ \cline{2-2}
x^4-1 & 2x^7-x^6-2x^5+x^4+2x^3-x^2-2x+5| \\
 & 2x^7-2x^3 \\
 & -x^6-2x^5+x^4+4x^3-x^2-2x+5
\end{array}$$
,

וגם בדרך הבאה

$$\frac{2x^7-x^6-2x^5+x^4+2x^3-x^2-2x+5}{x^4-1}=2x^3+\frac{-x^6-2x^5+x^4+4x^3-x^2-2x+5}{x^4-1}$$

ואשר בסופו עוברים לתרגיל חדש שבו דרגת המונה היא 6 או פחות , כעת נבצע את החלוק $\frac{-x^6}{x^4}=-x^2$ נכפול ונחסר ובסופו של השלב השני דרגת המונה תרד להיות 5 או פחות.

$$\begin{array}{rl}
 & 2x^3-x^2 \\ \cline{2-2}
 & 2x^7-x^6-2x^5+x^4+2x^3-x^2-2x+5| \\
 & 2x^7-2x^3 \\
x^4-1 & -x^6-2x^5+x^4+4x^3-x^2-2x+5 \\
 & -x^6+x^2 \\
 & -2x^5+x^4+4x^3-2x^2-2x+5
\end{array}$$

את השלבים הבאים נבצע יותר מהר ונקבל

$$\begin{array}{rl}
 & 2x^3-x^2-2x+1 \\ \cline{2-2}
 & 2x^7-x^6-2x^5+x^4+2x^3-x^2-2x+5| \\
 & 2x^7-2x^3 \\
 & -x^6-2x^5+x^4+4x^3-x^2-2x+5 \\
 & -x^6+x^2 \\
x^4-1 & -2x^5+x^4+4x^3-2x^2-2x+5 \\
 & -2x^5+2x \\
 & x^4+4x^3-2x^2-4x+5 \\
 & x^4-1 \\
 & 4x^3-2x^2-4x+6
\end{array}$$

או בצורה אחרת.

$$\frac{2x^7-x^6-2x^5+x^4+2x^3-x^2-2x+5}{x^4-1}=2x^3-x^2-2x+1+\frac{4x^3-2x^2-4x+6}{x^4-1}$$

נסכם את שלב א, שלב חלוקת הפולינומים, באותיות $\frac{p(x)}{q(x)}=m(x)+\frac{r(x)}{q(x)}$ כאשר במקרה הפרטי שלנו $m(x)=2x^3-x^2-2x+1, r(x)=4x^3-2x^2-4x+6$ ותמיד מתקיים בסוף שלב א כי deg(r(x))<deg(q(x)). אם במקרה מתקיים מראש כי deg(p(x))<deg(r(x)), אז אפשר להתיחס לשלב א כאילו r(x)=p(x),m(x)=0.

שלב ב-פרוק המכנה לגורמים בלתי פריקים.

שלב זה יהיה בתרגילים שלנו קל ביותר, אבל מבחינה מתמטית אמיתית הוא קשה ביותר, כלומר זוהי בעיה שאין לה אלגוריתם אלגברי (שאיננו נומרי) סופי שמתאים לכל המקרים. כמובן שאנחנו נדאג לתת תרגילים שבהם התהליך יהיה קל ביותר.

במקרה הפרטי שלנו $x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)=(x-1)(x+1)(x^2+1)$.
כל אחד מהפולינומים שקבלנו בלתי ניתן לפרוק. באותיות נכתוב $q(x)=b_1^{s_1}(x)b_2^{s_2}(x)\cdots b_t^{s_t}(x)$ כאשר כל אחד מהפולינומים מימין הוא בלתי פריק.

פריקות מעל השדה.

כל הפולינומים הם בחוג הפולינומים $\mathbb{R}[x]$, כלומר המקדמים של הפולינומים הם בשדה $\mathbb{R}$. אם היינו עובדים בשדה המרוכבים, שהוא עשיר יותר (קבוצה יותר גדולה של איברים), היינו יכולים להמשיך את הפרוק:

$$x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)=(x-1)(x+1)(x-i)(x+i).$$

אנחנו נמשיך לעבוד מעל הממשיים.

משפט (בלי הוכחה) בחוג $\mathbb{R}[x]$, הפולינומים הבלתי פריקים היחידים הם ממעלה אחת, או ממעלה שניה שהם חסרי שרשים ממשיים.

שלב ג- הצגה כסכום של שברים חלקיים

נביט על השבר $\frac{r(x)}{q(x)}=\frac{r(x)}{b_1^{s_1}(x)b_2^{s_2}(x)\cdots b_t^{s_t}(x)}$, ונציג אותו כסכום של שברים

$$\frac{r(x)}{q(x)}=\frac{r(x)}{b_1^{s_1}(x)b_2^{s_2}(x)\cdots b_t^{s_t}(x)}=\frac{m_{1,1}(x)}{b_1(x)}+\frac{m_{1,2}(x)}{b_1^2(x)}+\cdots+\frac{m_{1,s_1}(x)}{b_1^{s_1}(x)}+\frac{m_{2,1}(x)}{b_2(x)}+\frac{m_{2,2}(x)}{b_2^2(x)}+\cdots+\frac{m_{2,s_2}(x)}{b_2^{s_2}(x)}+\cdots,$$

בעלי מכנים שהם חזקות של פולנומים בלתי פריקים , כאשר כל אחד מהמונים מקיים כי דרגתו קטנה ממש מדרגת המכנה המתאים במעלה ראשונה.

כיון שהמלל לא מסביר מספיק את הענין, נמשיך פשוט את הדוגמא : $\frac{4x^3-2x^2-4x+6}{x^4-1}=\frac{4x^3-2x^2-4x+6}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$

במקרה זה $r_1(x)=x-1, r_2(x)=x+1, r_3(x)=x^2+1, s_1=s_2=s_3=1.$

ולכן נקבל כי $\frac{4x^3-2x^2-4x+6}{x^4-1}=\frac{a}{x-1}+\frac{c}{x+1}+\frac{dx+k}{x^2+1}$, כאשר דרגות 2 מהמונים הן 0, כלומר דרגת המכנה פחות אחד, ודרגת אחד המונים היא 1, כלומר דרגת המכנה פחות אחד.

לדוגמא, נניח כי השארית היא מהצורה $\frac{4x^3-2x^2-4x+6}{(x-1)^3(x+1)^4(x^2+1)^2}$

אז נקבל פרוק

$$\frac{4x^3-2x^2-4x+6}{(x-1)^3(x+1)^4(x^2+1)^2}=\frac{ax+c}{x^2+1}+\frac{dx+k}{(x^2+1)^2}+\frac{l}{x-1}+\frac{j}{(x-1)^2}+\frac{n}{(x-1)^3}+\frac{u}{x+1}+\frac{v}{(x+1)^2}+\frac{w}{(x+1)^3}+\frac{z}{(x+1)^4}.$$

וכעת נשאלת השאלה איך מוצאים את המקדמים?

שלב ד-מציאת המונים

פשוט כופלים במכנה המשותף ומשווים אגפים. נמשיך את התרגיל המקורי.

$$\frac{4x^3-2x^2-4x+6}{x^4-1}=\frac{a}{x-1}+\frac{c}{x+1}+\frac{dx+k}{x^2+1}\to a(x+1)(x^2+1)+c(x-1)(x^2+1)+$$
$$+(dx+k)(x-1)(x+1)=4x^3-2x^2-4x+6$$

אם למשל נציב x=1 בשויון האחרון נקבל
$a\cdot 2\cdot 2+c\cdot 0+(dx+k)0(x+1)=4-2-4+6\to 4a=4$, ולכן נובע כי
a=1. אם נציב x=-1 נקבל
$a0(x^2+1)+c\cdot(-2)\cdot 2+(dx+k)(x-1)0=-4-2+4+6\to -4c=4$ ולכן
c=-1. אם נציב x=0 נקבל כי $a\cdot 1\cdot 1+c\cdot(-1)\cdot 1+k(-1)1=6$ ולכן
נובע כי a-c-k=6 ולכן k=-4 . כעת נפתח בשויון הזהותי
האחרון את הבטויים בעלי חזקה שלישית בדיוק ונקבל, ולכן
נקבל $x^3(a+c+d)=4x^3$, כלומר נקבל כי d=4, ולכן נקבל סופסוף
את השויון $\frac{4x^3-2x^2-4x+6}{x^4-1}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+\frac{4x-4}{x^2+1}$ ואכן נבדק
ונקבל כי

$$\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+\frac{4x-4}{x^2+1}=\frac{(x+1)(x^2+1)-(x-1)(x^2+1)+4(x-1)(x^2-1)}{x^4-1}=$$

$$=\frac{2(x^2+1)+4(x^3-x^2-x+1)}{x^4-1}=\frac{4x^3-2x^2-4x+6}{x^4-1},$$

כדרוש.

ולכן סימנו עם הפרוק האלגברי :

$$\frac{2x^7-x^6-2x^5+x^4+2x^3-x^2-2x+5}{x^4-1}=2x^3-x^2-2x+1+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+\frac{4x-4}{x^2+1}$$

שלב ה-האינטגרציה

נסיים עם התרגיל שלנו ואח"כ נחשוב מה נעשה בתרגילים דומים.

$$\int(\frac{2x^7-x^6-2x^5+x^4+2x^3-x^2-2x+5}{x^4-1})dx=\int(2x^3-x^2-2x+1+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+\frac{4x-4}{x^2+1})dx=$$

$$=\frac{x^4}{2}-\frac{x^3}{3}-x^2+x+\ln|x-1|-\ln|x+1|+2\int\frac{2xdx}{x^2+1}-4\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{x^4}{2}-\frac{x^3}{3}-x^2+x+\ln|\frac{x-1}{x+1}|+$$

$$2\ln(x^2+1)-4\arctan(x)+c=\frac{x^4}{2}-\frac{x^3}{3}-x^2+x+\ln|\frac{x-1}{x+1}(x^2+1)^2|+4\arctan x+c$$

ובמקרה הכללי $\frac{p(x)}{q(x)}=m(x)+\frac{r(x)}{q(x)}$

אז קל לאנטגרל את m(x) שהוא פולינום. את השבר $\frac{r(x)}{q(x)}$
מפרקים לסכום של שברים חלקיים כאשר המכנים הם חזקות

של פולינומים בלתי פריקים מעל $\mathbb{R}$. פולינום ב״פ מעל $\mathbb{R}$ הוא ממעלה ראשונה או שניה. אם הוא מעלה ראשונה, אז נקבל

$\int \frac{a}{(x+b)^s}dx$, ואז ידוע כי האינטגרל הוא $a\ln|x+b|$. עבור המקרה

s=1 והוא $\frac{a}{(1-s)(x+b)^{s-1}}$ עבור המקרה 1<s. אם הגורם הב״פ

הוא ממעלה שניה הוא $\int \frac{d}{(ax^2+bx+c)^s}dx$ מהצורה ומתקיים כי

$\Delta = b^2 - 4ac < 0$, אחרת הפולינום פריק. אז גם מתקיים כי

$$ax^2+bx+c = a[(x+\frac{b}{2a})^2 + (\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2})] = a[(x+\frac{b}{2a})^2 + \frac{(4ac-b^2)}{4a^2}] = a[(x+\frac{b}{2a})^2 + (\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a})^2]$$

ולכן ,

$$\int \frac{d}{(ax^2+bx+c)^s}dx = \int \frac{d}{(a[(x+\frac{b}{2a})^2 + (\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a})^2)^s}dx = \frac{d}{a^s}\int \frac{dx}{[(x+\frac{b}{2a})^2 + (\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a})^2]^s}$$

נבצע החלפת משתנים u=x+(b/2a),du=dx,p=√(-Δ)/2a ,

נקבל את האינטגרל $\frac{d}{a^s}\int \frac{du}{[u^2+p^2]^s}$ שאותו כבר נוכל לחשב

לפחות במקרה s=1, ואז הוא שוה ל

$\frac{d}{a^s}\frac{1}{p}\arctan(\frac{u}{p}) + c = \frac{d}{pa^s}\arctan(\frac{u}{p}) + c$. במקרים 1<s האינטגרל

יותר קשה לחשוב, ונדגים את החשוב למקרה s=2 בלבד.

נביט על האינטגרל הבא $\int \frac{du}{u^2+p^2}$ ונחשב אותו בשתי דרכים, גם

מידית, וגם בחלקים: התשובה המידית היא כמובן

$\frac{1}{p}\arctan(\frac{u}{p}) + c$, אבל בנוסף נחשב אותו גם בחלקים ונקבל עבור

ההצבה

$$f'=1, g=\frac{1}{u^2+p^2}, f=u, g'=\frac{-2u}{(u^2+p^2)^2}, \int \frac{du}{u^2+p^2} = \frac{u}{u^2+p^2} + \int \frac{2u^2du}{(u^2+p^2)^2} =$$

$$= \frac{u}{u^2+p^2} + \int \frac{2(u^2+p^2-p^2)du}{(u^2+p^2)^2} = \frac{u}{u^2+p^2} + \int \frac{2(u^2+p^2)du}{(u^2+p^2)^2} - 2\int \frac{p^2)du}{(u^2+p^2)^2} =$$

$$= \frac{u}{u^2+p^2} + \frac{2}{p}\arctan(\frac{u}{p}) - 2p^2\int \frac{du}{(u^2+p^2)^2}.$$

ולכן נשוה בין התשובות השונות ונקבל. ,

$$\frac{u}{u^2+p^2} + \frac{2}{p}\arctan(\frac{u}{p}) - 2p^2\int \frac{du}{(u^2+p^2)^2} = \frac{1}{p}\arctan(\frac{u}{p}) + c \rightarrow$$

$$2p^2\int \frac{du}{(u^2+p^2)^2} = \frac{u}{u^2+p^2} + \frac{2}{p}\arctan(\frac{u}{p}) + c \rightarrow$$

$$\int \frac{du}{(u^2+p^2)^2} = \frac{u}{2p^2(u^2+p^2)} + \frac{1}{p^3}\arctan(\frac{u}{p}) + c$$

בדרך דומה אפשר לחשב את שאר המקרים של s.

פולינום בשני משתנים.

פונקציה

$$f(x,y)=a_0+a_{1,0}x+a_{0,1}y+a_{2,0}x^2+a_{1,1}xy+a_{0,2}y^2+a_{3,0}x^3+a_{2,1}x^2y+a_{1,2}xy^2+a_{0,3}y^3+\cdots$$

תקרא פולינום בשני משתנים

פונקציה רציונלית בשני משתנים היא מנה של שני פולינומים בשני משתנים דוגמא : $\frac{2z^2y-y^3}{z+2y}$

פונקציה רציונלית טריגונומטרית היא פונקציה רציונלית בשני משתנים כאשר במקום אחד המשתנים מציבים sin(x) ובמקום המשתנה האחר מציבים cos(x) . לדוגמא, נביט בפונקציה הרציונלית הקודמת נציב ונקבל $\frac{2\sin^2(x)\cos(x)-\cos^3(x)}{\sin(x)+2\cos(x)}$.

הצבה עבור אינטגרלים של פונקציות רציונליות טריגונומטריות.

נתונה פונקציה רציונלית טריגונומטרית. ההצבה הבאה היא הצבה קבועה, וכאשר היא נעשית האינטגרל של הפונקציה הרציונלית הטריגונומטרית הופך להיות אינטגרל של פונקציה רציונלית רגילה, ושאותו פותרים כמו שכבר למדנו.

נעיר שיש מקרים פרטיים שבהם יש הצבות שהן יותר מוצלחות (יותר קלות), כלומר שהן עדיפות על ההצבה שנלמד כעת.
יתרונה של ההצבה שהיא מתאימה לכל פונקציה רציונלית טריגונומטרית, וחסרונה שבגלל כלליותה היא ארוכה יותר מהצבות פרטיות שמתאימות למקרים פרטיים.

ההצבה היא t=tan(x/2) או מה ששקול x=2arctan(t).

נמשיך עם הצבה זו ונבטא את sin(x),cos(x),dx במשתנה החדש x.

נקבל

$$1+\tan^2(\frac{x}{2})=\frac{1}{\cos^2(\frac{x}{2})}\to\cos^2(\frac{x}{2})=\frac{1}{1+\tan^2(\frac{x}{2})}=\frac{1}{1+t^2}\to\sin^2(\frac{x}{2})=1-\cos^2(\frac{x}{2})=1-\frac{1}{1+t^2}=$$

$$=\frac{1+t^2}{1+t^2}-\frac{1}{1+t^2}=\frac{t^2}{1+t^2}\to\cos(\frac{x}{2})=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\to\sin(\frac{x}{2})=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\to\sin(x)=2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})=$$

$$=2\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}=\frac{2t}{1+t^2},\cos(x)=\cos^2(\frac{x}{2})-\sin^2(\frac{x}{2})=\frac{1}{1+t^2}-\frac{t^2}{1+t^2}=\frac{1-t^2}{1+t^2}.\frac{dx}{dt}=\frac{2}{1+t^2}$$

$$\to dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

דוגמא:

חשב את $\int\frac{dx}{3+\sin(x)+\cos(x)}$

תשובה

$$\int\frac{dx}{3+\sin(x)+\cos(x)}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{2dt}{3(1+t^2)+2t+1-t^2}=\int\frac{2dt}{4+2t+2t^2}=$$

$$=\int\frac{dt}{t^2+t+2}=\int\frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}}=\int\frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{7}}{2})^2}=\frac{2}{\sqrt{7}}\arctan(\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}})+c=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{7}}\arctan(\frac{2t+1}{\sqrt{7}})+c=\frac{2}{\sqrt{7}}\arctan(\frac{2\tan(\frac{x}{2})+1}{\sqrt{7}})+c$$

דוגמא לאי יחידות האינטגרל

אני מודה לקרן סורקין על השאלה

נחשב את $\int\frac{dx}{\cos(x)}$

פתרון א על ידי ההצבה $t=\tan(\frac{x}{2})$

נובע כי $\cos(x)=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}$ ולכן

$$\int\frac{dx}{\cos(x)}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{2dt}{1-t^2}=\int\frac{2dt}{(1-t)(1+t)}=\int[\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}]dt=\ln(1+t)-\ln(1-t)+c=$$

$$=\ln\frac{1+t}{1-t}+c=\ln\frac{1+\tan(\frac{x}{2})}{1-\tan(\frac{x}{2})}+c$$

פתרון ב על ידי ההצבה $t=\sin(x)$

נובע כי $dx=\dfrac{dt}{\cos(x)}, dt=\cos(x)dx$ ולכן

$$\int\frac{dt/\cos(x)}{\cos(x)}=\int\frac{dt}{\cos^2(x)}=\int\frac{dt}{1-t^2}=\int\frac{dt}{(1-t)(1+t)}=\frac{1}{2}\int[\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}]dt=$$

$$=\frac{1}{2}(\ln(1+t)-\ln(1-t))+c=\frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t}+c=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}+c$$

ולכאורה קבלנו שתי תשובות שונות, אבל מסתבר שהתשובות שקבלנו זהות. נשתבש בזהות $\sin(x)=2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})$ ונקבל

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})}{1-2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})}$$ נשתבש בזהות

$\sin^2(\frac{x}{2})+\cos^2(\frac{x}{2})=1$ ונקבל

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}=\frac{1}{2}\ln\frac{\sin^2(\frac{x}{2})+\cos^2(\frac{x}{2})+2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})}{\sin^2(\frac{x}{2})+\cos^2(\frac{x}{2})-2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{[\cos(\frac{x}{2})+\sin(\frac{x}{2})]^2}{[\cos(\frac{x}{2})-\sin(\frac{x}{2})]^2}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\cos(\frac{x}{2})+\sin(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})-\sin(\frac{x}{2})}\right)^2=\ln\left(\frac{\cos(\frac{x}{2})+\sin(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})-\sin(\frac{x}{2})}\right)=$$

$$=\ln\left(\frac{\frac{\cos(\frac{x}{2})+\sin(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})}}{\frac{\cos(\frac{x}{2})-\sin(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})}}\right)=\ln\left(\frac{1+\tan(\frac{x}{2})}{1-\tan(\frac{x}{2})}\right)$$

כדרוש

שמושי האינטגרל

חשוב שטחים.

נתונה פונקציה f רציפה וחיובית בקטע [a,b]. נביט בשטח אשר מוגבל על ידי ארבעה קוים. הגרף y=f(x) מעל, ציר ה-x מתחת, והקוים x=a,x=b מימין ומשמאל. נניח כי G היא קדומה (אינטגרל) של f. כמות השטח הכלואה בצורה היא G(b)-G(a).

הפסקה הקודמת קרויה המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והוכח גם על ידי ניוטון וגם על ידי לייבניץ.

סימון : נסמן את G(b)-G(a) על ידי $\int_a^b f(x)dx$, ונקרא לו האינטגרל המסוים של f בין a ובין b.

התשובה אינה תלויה בקדומה. נניח כי גם H היא קדומה של f, אז H'=G'=f, אז קים קבוע c כך שמתקיים H=G+c, אז מתקיים H(b)-H(a)=(G(b)+c)-(G(a)+c)=G(b)-G(a).

מציאת שטחים מסובכים יותר. נניח כי נתונות שתי פונקציות f,g רציפות, ורוצים למצוא את השטח הכלוא בין f ו-g, אז נפתר את המשואה f(x)=g(x), ובין כל שתי נקודות חתוך סמוכות נחשב את השטח מתחת הפונקציה הגדולה פחות השטח מתחת הפונקציה הקטנה.

דוגמא

חשב את השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות

$$f(x)=24x^3+96x^2+48x+5, g(x)=12x^3+72x^2+84x+5, f(x)-g(x)=12x^3+24x^2-36x=$$
$$=12x(x+3)(x-1), S=\int_{-3}^{0}(12x^3+24x^2-36x)dx-\int_{0}^{1}(12x^3+24x^2-36x)dx, F=3x^4+8x^3-18x^2,$$
$$S=F(0)-F(-3)-(F(1)-F(0))=2F(0)-F(1)-F(-3)=-((3+8-18)+(243-216-486))=$$
$$=7+459=466$$

מציאת נפח גוף סבוב סביב ציר x

נתונה פונקציה f רציפה בקטע [a,b], ונסובב את הגרף שלה סביב ציר x. נקבל גוף סבוב. אז כמות הנפח בגוף הסבוב היא

$$\pi\int_a^b f(x)^2dx$$

דוגמא

נתון חרוט שגבהו h ושמחוג בסיסו r. מהו הנפח שהוא כולא?

נביט על הפונקציה f(x)=(Rx)/h המוגדרת בקטע [0,h]. הגרף הוא קטע מקו ישר שקצותיו בנקודות (0,0),(h,R). אם נסובב את הגרף סביב ציר x, נקבל חרוט שוכב על צירו, שבסיסו בעל מחוג R, וגבהו לאורך ציר x הוא h. לכן כמות הנפח היא האינטגרל של $f(x)^2$ ונקבל

$$f(x)=\frac{Rx}{h}, 0\le x\le h, V=\pi\int_0^h\left(\frac{Rx}{h}\right)^2dx=\left.\frac{\pi R^2x^3}{3h^2}\right|_0^h=\frac{\pi R^2h}{3}$$

מציאת נפח גוף סבוב סביב ציר y.

נתונה פונקציה f רציפה בקטע [a,b], ונסובב את הגרף שלה סביב ציר y. נקבל גוף סבוב. אז כמות הנפח בגוף הסבוב היא

$$2\pi\int_a^b xf(x)dx$$

דוגמא

נתון חרוט שגבהו h ושמחוג בסיסו r. מהו הנפח שהוא כולא? חשב הפעם על ידי בסוב סביב ציר y.

הפעם נביט בפונקציה f(x)=h-(hx)/r בקטע [0,r]. שוב הגרף הוא קטע של קו ישר שקצותיו הם (0,h),(r,0). נסובב את הגרף סביב ציר y ונקבל

$$f(x)=h-\frac{hx}{R},0\le x\le R,V=2\pi\int_0^R x(h-\frac{hx}{R})dx=2\pi h(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3R})\Big|_0^R=2\pi R^2h(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})=\frac{\pi R^2h}{3}$$

עוד דוגמא: מצא נפח כדור שמחוגו R.

נביט בעקום $x^2+y^2=R^2$, שהגרף שלו הוא מעגל בעל מחוג R ומרכזו ראשית הצירים. נעבור לפונקציה $f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$ בקטע [-R,R], בעלת גרף שהוא החצי העליון של המעגל הקודם. אז הכדור הוא גוף הסבוב סביב ציר x של הפונקציה ונקבל את הנפח:

$$f(x)=\sqrt{R^2-x^2},-R\le x\le R,V=\pi\int_{-R}^{R}(\sqrt{R^2-x^2})^2dx=\pi\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)dx=$$

$$=\pi(R^2x-\frac{x^3}{3})\Big|_{-R}^{R}=\pi\frac{R^3(2+2)}{3}=\frac{4\pi R^3}{3}$$

עוד דוגמא

חשב את אותו נפח על ידי סבוב סביב ציר y.

נביט בפונקציה $f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$ בקטע [0,R], בעלת גרף שהוא החצי הימני של חצי המעגל הקודם. נסובב סביב ציר x ונקבל חצי כדור ונפחו הוא:

$$f(x)=\sqrt{R^2-x^2},0\le x\le R,V=2\pi\int_0^R x\sqrt{R^2-x^2}dx,u=R^2-x^2,du=-2xdx,xdx=\frac{-du}{2},$$

$$V=-2\pi\int_{R^2}^0\frac{\sqrt{u}}{2}du=\pi(\frac{u^{1.5}}{1.5})\Big|_0^{R^2}=\frac{\pi R^3 2}{3}=\frac{2\pi R^3}{3}$$

מציאת אורך עקום

נתונה פונקציה f רציפה בקטע [a,b], אז אורך העקום הוא

$$\int_a^b\sqrt{1+f'(x)^2}dx$$

דוגמא

חשב את אורך העקום $f(x)=\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}.$ בקטע [0,ln2]

תשובה

$$f(x)=\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2},f'(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2},(f')^2=\frac{e^{2x}+e^{-2x}-2}{4},(f')^2+1=\frac{e^{2x}+e^{-2x}+2}{4},$$

$$\sqrt{1+(f')^2}=\frac{e^x+e^{-x}}{2},l=\int_0^{\ln 2}\sqrt{1+(f')^2}dx=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\Big|_0^{\ln 2}=\frac{2-0.5}{2}-\frac{1-1}{2}=\frac{3}{4}.$$

סכומי רימן B.Riemann

המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי מוכח על ידי שימוש בסכומי רימן. נתון שטח אשר מוגבל על ידי 4 קוים. y=0 (ציר x) מתחתיו, x=a משמאלו, x=b מימינו והגרף של הפונקציה החיובית y=f(x) מעליו. נחלק את השטח על ידי קוים אנכיים לתתי שטחים, ונניח כי כל תת שטח הוא 'מלבן'. נסכם את שטחי המלבנים ונקבל את מה שמוגדר כ-סכום רימן.

כאשר נשאיף את מספר תתי המלבנים לאינסוף (כלומר מספר החלוקות יגדל), אז (עבור פונקציות רציפות, מונוטוניות רציפות למקוטעין) רימן הוכיח כי סכומי רימן שואפים לשטח האמיתי.

דוגמא

בצע את סכומי רימן עבור הפונקציה $f(x)=x^2$ בקטע [a,b] כאשר נניח כי הרחבים של המלבנים שווים, וכי גבהו של כל 'מלבן' הוא ערך הפונקציה בנקודה השמאלית שלה.

תשובה

נניח כי יש n תתי מלבנים שוי בסיסים. אז נגדיר h=(b-a)/n.
המלבן הראשון הוא בין הנקודות a ו-a+h, רחבו הוא h, וגבהו הוא a^2, ולכן השטח הראשון הוא ha^2. המלבן השני רחבו h וגבהו $(a+h)^2$, השלישי רחבו h וגבהו $(a+2h)^2$, ולכן סכום רימן, שהוא סכום שטחי המלבנים הוא:

$$h\sum_{i=0}^{n-1}(a+ih)^2 = h(\sum_{i=0}^{n-1}a^2 + 2ah\sum_{i=0}^{n-1}i + h^2\sum_{i=0}^{n-1}i^2) = h(na^2 + 2ah\frac{n(n-1)}{2} + h^2\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}) =$$
$$\frac{b-a}{n}na^2 + 2a(\frac{b-a}{n})^2\frac{n(n-1)}{2} + (\frac{b-a}{n})^3\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} =$$
$$= (b-a)a^2 + a(b-a)^2\frac{n-1}{n} + (b-a)^3\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$$

המשך דוגמא

חשב את גבול סכומי רימן שלמעלה כאשר n שואף לאינסוף.

$$\lim_{n\to\infty}[(b-a)a^2 + a(b-a)^2\frac{n-1}{n} + (b-a)^3\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}] = (b-a)a^2 + a(b-a)^2 + (b-a)^3\frac{2}{6} =$$
$$= \frac{(b-a)}{3}[3a^2 + 3a(b-a) + (b-a)^2] = \frac{(b-a)}{3}(3ab + a^2 + b^2 - 2ab) = \frac{(b-a)}{3}(a^2 + b^2 + ab) =$$
$$= \frac{b^3 - a^3}{3} = \int_a^b x^2 dx$$

כלומר הגבול של סכומי רימן כאשר n שואף לאינסוף הוא אכן האינטגרל, ובאמת סכומי רימן מתכנסים לאינטגרל.

חלוקה של קטע.

נתון קטע [a,b]. נבחר חלוקה של הקטע לתת קטעים $\Delta=\{a=x_0<x_1<x_2\cdots<x_{n-1}<x_n=b\}$. נגדיר את הערך המוחלט של החלוקה Δ על ידי $|\Delta|=\max\{x_1-x_0,x_2-x_1,\cdots,x_n-x_{n-1}\}$, כלומר זהו אורך תת הקטע הגדול ביותר בחלוקה.

הגדרת סכום רימן

נניח כי בקטע [a,b] מוגדרת פונקציה f, חלוקה Δ וכי בחרנו נקודות ביניים $x_{i-1}\le c_i\le x_i,\forall i,1\le i\le n.$ נגדיר את סכום רימן התלוי בכל הנתונים, $SR(f,\Delta,c_i,1\le i\le n).$ על ידי :

$SR=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})f(c_i)$. המשמעות הגיאומטרית של הסכום היא שאנחנו עוברים על פני כל תתי הקטעים של Δ, ובכל תת קטע מחשבים שטח של מלבן שרחבו x_i-x_{i-1} ושגבהו $f(c_i)$ בתקוה ששטח המלבן הזה מקרב את השטח שמתחת לגרף באותו תת קטע.

אינטגרביליות רימן

נתון מספר סופי I. נגיד כי f אינטגרבילית רימן בקטע [a,b] ובעל אינטגרל I אם

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall\Delta,|\Delta|<\delta,\forall c_i,1\le i\le n\to|SR-I|<\varepsilon$. I קרוי ערך האינטגרל.

המשמעות הגאומטרית היא שבהנתן $\varepsilon>0$ קים $\delta>0$ כך שלכל חלוקה Δ המקיימת $|\Delta|<\delta$, ולכל בחירת נקודות בינים c_i, מתקיים כי הערך המוחלט של המרחק בין SR ו-I קטן מ ε

טענה

נניח כי f כמקודם אינטגרבילית רימן. אז f חיבת להיות חסומה בקטע [a,b].

הוכחה

נניח כי f אינטגרבילית רימן עם אינטגרל I, נבחר $\varepsilon=1$, ועבורו יש $\delta>0$. נניח כי f איננה חסומה ב [a,b]. נבחר ונקבע חלוקה Δ המקיימת $|\Delta|<\delta$. אם f היתה חסומה על כל תת קטע של Δ אז היה נובע כי f חסומה על כל [a,b]. לכן יש תת קטע אחד

לפחות שבו f איננה חסומה. נסמן תת קטע זה על ידי $[x_{j-1},x_j]$
בנוסף נבחר נקודות ביניים $c_i,1\le i\le n$. נקבל $|SR-I|<1$
בנוסף מתקיים

$$SR-I=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})f(c_i)-I=(x_j-x_{j-1})f(c_j)+\sum_{i=1,i=j}^{n}(x_i-x_{i-1})f(c_i)-I=$$

$$=(x_j-x_{j-1})f(c_j)-(\sum_{i=1,i=j}^{n}(-1)(x_i-x_{i-1})f(c_i)+I).$$

ולכן

$$|(x_j-x_{j-1})f(c_j)|-|(\sum_{i=1,i=j}^{n}(-1)(x_i-x_{i-1})f(c_i)+I)|\le|(x_j-x_{j-1})f(c_j)-(\sum_{i=1,i=j}^{n}(-1)(x_i-x_{i-1})f(c_i)+I)|=$$

$$=|SR-I|<1\to(x_j-x_{j-1})|f(c_j)|<1+|(\sum_{i=1,i=j}^{n}(-1)(x_i-x_{i-1})f(c_i)|\to$$

$$|f(c_j)|<\frac{1+|(\sum_{i=1,i=j}^{n}(-1)(x_i-x_{i-1})f(c_i)|}{x_j-x_{j-1}}$$

נקבע את $c_i,i\neq j$ ולכן אגף ימין באי השיויון האחרון קבוע, ואי השויון מתקיים לכל $c_j\in[x_{j-1},x_j]$ כלומר f חסומה על $[x_{j-1},x_j]$, בסתירה להנחה שאיננה חסומה. לכן f חיבת להיות חסומה על [a,b]. ■

מסקנה

כיון ש f חסומה על [a,b], אז לכל חלוקה Δ ולכל קטע $[x_{i-1},x_i]$ קימים $Sup(f(x)),x\in[x_{i-1},x_i]$ ו $Inf(f(x)),x\in[x_{i-1},x_i]$.

סכומי דרבו Darboux

נניח כי נתונה f חסומה בקטע [a,b], וחלוקה Δ שלו. נגדיר את סכומי דרבו העליון והתחתון על ידי:

$$\overline{SD}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})Sup(f(x)),x\in[x_{i-1},x_i]$$

$$\underline{SD}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})Inf(f(x)),x\in[x_{i-1},x_i]$$

נשים לב כי סכומי דרבו תלויים רק ב –f וב Δ , אך לא בבחירת נקודות הביניים $c_i,1\le i\le n$. כל בחירה של $c_i,1\le i\le n$ התלויים בקטע תיצור אי שויון $\underline{SD}\le SR\le\overline{SD}$

יחס העדינות בין חלוקות

נתונות שתי חלוקות Δ,Γ. נגיד כי Δ מעדנת את Γ , אם קימת הכלה של קבוצות $\Gamma\subseteq\Delta$, כלומר Δ מכילה את כל הנקודות של Γ ואולי אפילו יותר נקודות. ראינו בדוגמא והבנו באינטואיציה כי ככל שהחלוקה עדינה יותר מתקיים כי סכומי דרבו קרובים יותר לערך ה'אמיתי' של האינטגרל.

טענה

נתונות חלוקות $\Gamma\subseteq\Delta$ של הקטע [a,b] ופונקציה חסומה המוגדרת על [a,b]. אז מתקיימים אי השויונים $\overline{SD}(\Delta)\le\overline{SD}(\Gamma)$ ו $\underline{SD}(\Gamma)\le\underline{SD}(\Delta)$

טענת עזר 1

נתונות חלוקות $\Gamma\subseteq\Delta$ של הקטע [a,b] כך שב Δ יש בדיוק נקודה אחת נוספת על פני Γ , ופונקציה חסומה המוגדרת על [a,b]. אז מתקיימים אי השויונים $\overline{SD}(\Delta)\le\overline{SD}(\Gamma)$ ו $\underline{SD}(\Gamma)\le\underline{SD}(\Delta)$

הוכחת הטענה הגדולה על סמך נכונות טענת עזר 1.

באינדוקציה על מספר הנקודות של $|\Delta-\Gamma|$. אם $|\Delta-\Gamma|=1$, זו בדיוק טענת העזר ומותר לנו להשתמש בה. נניח כי הוכחנו את הטענה עבור $|\Delta-\Gamma|=n$, ונוכיח עבור $|\Delta-\Gamma|=n+1$. נניח כי ב Δ יש בדיוק n+1 נקודות נוספות על פני Γ , נבחר n מתוך הנקודות הנוספות ונוסיף ל-Γ, נקבל חלוקה אותה נסמן Θ . אז מתקיים $\Gamma\subseteq\Theta\subseteq\Delta$, וגם מתקיים כי $|\Theta-\Gamma|=n$ $|\Delta-\Theta|=1$. אז אי השויון $\overline{SD}(\Theta)\le\overline{SD}(\Gamma)$ מתקיים על סמך הנחה האינדוקציה, ואי השויון $\overline{SD}(\Delta)\le\overline{SD}(\Theta)$ מתקיים על סמך טענת עזר 1, ובסך הכל מתקיים $\overline{SD}(\Delta)\le\overline{SD}(\Theta)\le\overline{SD}(\Gamma)$. כדרוש. ההוכחה עבור אי השויון ההפוך דומה.

טענת עזר 2

נתונה החלוקות $\Gamma\subseteq\Delta$ של הקטע [a,b] כך ש $\Delta=\{a,d,b\}$ וכך ש $\Gamma=\{a,b\}$. כלומר בΔ- יש בדיוק הנקודה d נוספת על פני שתי הנקודות של Γ , ופונקציה חסומה המוגדרת על [a,b]. אז מתקיימים אי השויונים $\overline{SD}(\Delta)\le\overline{SD}(\Gamma)$ ו $\underline{SD}(\Gamma)\le\underline{SD}(\Delta)$

הוכחת טענת עזר 1 על סמך טענת עזר 2

נסמן את הנקודה היחידה של $\Gamma - \Delta$ על ידי d. אז קים i יחיד, כך ש $x_{i-1} \le d \le x_i$. אז באי השויון $\overline{SD}(\Delta) \le \overline{SD}(\Gamma)$ נקבל כי לכל $j, 1 \le j \le n, j \ne i$ המחובר הj-י בסכומים $\overline{SD}(\Gamma)$ ו $\overline{SD}(\Delta)$ זהה ושוה ל $(x_j - x_{j-1})Sup(f(x)), x \in [x_{j-1}, x_j]$, ולכן ניתן לקזז אותו משני אגפי אי השויון ולקבל טענה שקולה בעלת פחות מחובר, וכך לעשות לכל $j, 1 \le j \le n, j \ne i$. לאחר כל הצמצומים נקבל כי נותר הסכום $(d - x_{i-1})Sup(f(x)), x \in [x_{i-1}, x_d] + (x_i - d)Sup(f(x)), x \in [x_i, d]$, מתוך $\overline{SD}(\Delta)$ ונותר האבר $(x_i - x_{i-1})Sup(f(x)), x \in [x_{i-1}, x_i]$ מתוך $\overline{SD}(\Gamma)$, ועל ידי הסימון $x_{i-1} = a, x_i = b, d = d$ נקבל את המצב של טענת עזר 2.

הוכחת טענת עזר 2

חסם עליון (סופרמום) על פני קבוצה חלקית תמיד קטן או שוה לחסם הגדולה יותר ולכן מתקיימים אי השויונים
$Sup(f(x)), x \in [a,d] \le Sup(f(x)), x \in [a,b]$ ו
$Sup(f(x)), x \in [d,b] \le Sup(f(x)), x \in [a,b]$. נכפל את אי השויון הראשון ב (d-a) ואת השני ב (b-d) ונקבל

$$(d-a)Sup(f(x)), x \in [a,d] + (b-d)Sup(f(x)), x \in [d,b] \le \{(d-a)+(b-d)\}Sup(f(x)), x \in [a,b]$$

או מה ששקול

$$\overline{SD}(\Delta) \le \{(d-a)+(b-d)\}Sup(f(x)), x \in [a,b] = (b-a)Sup(f(x)), x \in [a,b] = \overline{SD}(\Gamma)$$

כדרוש

ההוכחה עבור אי השויון ההפוך דומה. ■

טורים

ידוע כי אפשר לחבר שני איברים בשדה, ולפי חוק הקבוץ אפשר לחבר שלושה, ארבעה, חמישה וכל מספר סופי של איברים. מה עושים כשיש לנו מספר אינסופי של מחוברים?

אינפי לעזרת חיבור בשדות

נתונה סדרה של איברים $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$, ורוצים לחבר את כולם, ואי אפשר. ניצור את סדרת הסכומים החלקיים $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \cdots, S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \cdots$, ואם לסדרה זו יש גבול S, נגיד כי הסכום של אינסוף איברי הסדרה הוא S, נסמן

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$, ונקרא לסדרת הסכומים החלקיים הטור המבוסס על הסדרה, או הטור של הסדרה, ול S נקרא סכום הטור.
אם הטור איננו מתכנס נאמר כי הוא מתבדר.

בטור כלשהו נפריד את הדיון לשתי שאלות. האם הטור מתכנס או מתבדר, ומהו סכום הטור. בדרך כלל תשובה לשאלה הראשונה היא כבר מסובכת מספיק, והדוגמא הבאה היא בין היחידות שבה יודעים האם הטור מתכנס ולאיזה סכום.

דוגמא טור הנדסי

נתון מספר ממשי x, ונגדיר $a_1 = 1, a_2 = x, a_3 = x^2, \cdots, a_n = x^{n-1}, \cdots$, ונחשב את סדרת הסכומים החלקיים $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}$ אז נביט על $xS_n = \sum_{k=1}^{n} xa_k = x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + x^n$ ונחשב $S_n - xS_n = 1 - x^n \to (1-x)S_n = 1 - x^n \to S_n = \frac{1-x^n}{1-x}$, ולכן אם מתקיים $-1 < x < 1$, אז $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ ולכן $\lim_{n\to\infty} \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x}$ ולכן זהו סכום הטור בתנאי ש $-1 < x < 1$. עבור x=1, $S_n=n$ הטור מתבדר. עבור x=-1 נקבל כי עבור n זוגי, $S_n=0$ ועבור n איזוגי $S_n=2/(1-x)$, ולכן הטור מתבדר. עבור 1<x, מתקיים $S_n = \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{x^n-1}{x-1}, \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\infty}{x-1} = \infty.$ והטור מתבדר. עבור x<-1, מתקיים $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\pm\infty}{x-1} = \pm\infty.$, והטור מתבדר.

טענה מחיקת מספר סופי של איברים

נתונה סדרה $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$, ונתון מספר טבעי K, נגדיר סדרה חדשה על ידי מחיקת K האיברים הראשונים $b_1 = a_{K+1}, b_2 = a_{K+1}, \cdots, b_n = a_{K+n}, \cdots,$ אז הטענות הבאות שקולות : א. הטור של הסדרה a_n מתכנס. ב. הטור של הסדרה b_n מתכנס.

הוכחה :

$$S_n(b)=\sum_{k=1}^{n}b_k=\sum_{k=1}^{n}a_{K+k}=\sum_{k=1}^{K+n}a_k-\sum_{k=1}^{K}a_k=S_{K+n}(a)-S_K(a)$$

כאשר n שואף לאינסוף התכנסות אגף שמאל שקולה להתכנסות אגף ימין, והבטוי היחיד התלוי ב-n הוא $S_{K+n}(a)$ והתכנסותו שקולה להתכנסות הטור של הסדרה a. ■

טענה

נניח כי הטור $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ מתכנס, אז גם הסדרה a_k מתכנסת ל-0.

הוכחה

לפי ההגדרה $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ וגם לפי ההגדרה $S_{n-1}=\sum_{k=1}^{n-1}a_k$ ולכן מתקיים $a_n=S_n-S_{n-1}$. בנוסף גם S_n וגם S_{n-1} מתכנסים לאותו גבול S, ולכן $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=S-S=0.$ ■

טורים חיוביים (החל ממקום מסוים)

נניח שקיים K מסויים כך שמתקיים $(K<n)\rightarrow(0\le a_n)$. אז כלומר למעט K האיברים הראשונים, כל שאר המחוברים הם אי שליליים, ולכן מתקיים $(K<n)\rightarrow(S_n\le S_{n+1})$, כלומר למעט K האיברים הראשונים סדרת הסכומים החלקיים היא עולה במובן הרחב.

טענה התכנסות שקולה לחסימות

נתונה סדרה שהיא אי שלילית החל ממקום מסויים. אז הטענות הבאות שקולות.

א. הטור של הסדרה מתכנס (סדרת הסכומים החלקיים מתכנסת).
ב. הטור של הסדרה חסום (סדרת הסכומים החלקיים חסומה).

הוכחה

כל סדרה מתכנסת היא חסומה, ולכן א גורר את ב. בהנתן ב, כלומר סדרת הסכומים החלקיים חסומה, וגם נתון שהיא עולה במובן הרחב (החל ממקום מסוים), וידוע (לפי משפט וירשטרס) כי סדרה עולה (החל ממקום מסוים) וחסומה היא מתכנסת ולכן ב גורר את א. ■

משפט (מבחן ההשוואה לטורים חיוביים)

נתונות שתי סדרות ונתון K טבעי כך ש $(K<n) \to (0\le a_n \le b_n)$ אז:

א. אם הטור $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ מתכנס אז גם הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס.

ב. אם הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתבדר אז גם הטור $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ מתבדר.

הוכחה

נמחק את K האיברים הראשונים של שתי הסדרות, ולפי הטענה הראשונה התכנסות (או התבדרות) של אף טור לא משתנה. אז מתקיים $(0\le a_n \le b_n)$, ולכן לכל m טבעי מתקיים כי $0 \le S_m(a) = \sum_{n=1}^{m} a_n \le \sum_{n=1}^{m} b_n = S_m(b)$.

הוכחת א. לכן אם הטור $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ מתכנס, אז סדרת הסכומים החלקיים $S_m(b)$ חסומה, ולכן הסדרה הקטנה ממנה $S_m(a)$ חסומה ולכן הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס.

הוכחה ראשונה של ב. לכן אם הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתבדר, אז סדרת הסכומים החלקיים $S_m(a)$ אינה חסומה, ולכן הסדרה הגדולה ממנה $S_m(b)$ אינה חסומה ולכן הטור $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ מתבדר.

הוכחה שניה של ב. אם נסמן את טענה א בקצור על ידי $p \to q$, אז טענה ב משמעה $\bar{q} \to \bar{p}$, ושתי אלו הן טענות שקולות לוגית.
■

דוגמא

בדוק האם הטור $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}$ מתכנס וחשב את סכומו.

תשובה

מתקיים כי $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$, ולכן

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}).$, ולכן $S_n=\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}.$

ולכן $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{1}-\frac{1}{\infty}=1.$ כלומר הטור מתכנס וסכומו 1.

דוגמא

בדוק האם הטור $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^2}$ מתכנס והערך את סכומו.

תשובה

לכל n מתקיים כי $\frac{1}{k(k+1)}\le\frac{1}{(k+1)^2} \rightarrow k(k+1)\le(k+1)^2$, ולכן לפי משפט ההשואה סעיף א, הטור $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^2}$ מתכנס וסכומו קטן או שוה לסכום הטור הגדול, כלומר קטן או שוה 1.

דוגמא

בדוק האם הטור $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ מתכנס והערך את סכומו.

תשובה

הסדרה של הטור הזה זהה לסדרה של הטור הקודם, למעט האבר הראשון של הטור החדש שלא קים בטור הקודם. לכן לפי הטענה אודות מחיקת האיברים, גם הטור החדש מתכנס.

סכומו מקיים $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^2}\le 1+1=2.$

דוגמא

בדוק האם הטור $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}}$ מתכנס.

תשובה

אם מתקיים $2\le\alpha$, אז נובע לכל k טבעי כי $k^2\le k^{\alpha}\to\frac{1}{k^{\alpha}}\le\frac{1}{k^2}$,
ולכן לפי סעיף א של מבחן ההשואה ולפי התרגיל הקודם הטור מתכנס וסכומו קטן או שוה ל2. עבור כל ערך אחר של α אין לנו כרגע שום דרך לדעת את התכנסותו או התבדרותו.

דוגמא (הטור ההרמוני)

בדוק האם הטור $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ מתכנס.

תשובה

נעריך חלק מהסכומים החלקיים. אז מתקיים $S_1=1$, $S_2=\frac{3}{2}$

וכן $S_4=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\ge 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=2.$. בצורה דומה

$S_8=S_4+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\ge 2+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=2.5$ ובצורה דומה $S_{16}\ge 3$ וכן

$S_{2^n}\ge\frac{2+n}{2}$. ולכן כיון ש $\lim_{n\to\infty}\frac{2+n}{2}=\infty$, נובע כי $\lim_{n\to\infty}S_{2^n}=\infty$, ולכן

הסדרה S_n איננה חסומה, ולכן הטור ההרמוני $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ מתבדר.

דוגמא

בדוק האם הטור $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}}$ מתכנס.

תשובה

אם מתקיים $2\le\alpha$, ראינו כי $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}}$ מתבדר. אם $\alpha\le 1$, אז נובע

לכל k טבעי כי $k^{\alpha}\le k\to\frac{1}{k}\le\frac{1}{k^{\alpha}}$, ולכן לפי סעיף ב של מבחן

ההשואה ולפי התרגיל הקודם הטור מתבדר. עבור כל ערך אחר של α אין לנו כרגע שום דרך לדעת את התכנסותו או התבדרותו.

אינטגרל לא אמיתי ע"פ קרן (קטע אינסופי)

עד עתה למדנו על אינטגרלים ע"פ קטע סופי. אם נתונה פונקציה f מוגדרת ורציפה ע"פ הקרן $[a,\infty)$, ו נוכל להגדיר את האינטגרל של f ע"פ הקרן על ידי זה שנחשב את $\int_a^b f(x)dx$, ולתוצאה זו נעשה . אם הגבול מתכנס נגיד כי האינטגרל מתכנס, ואחרת נגיד כי האינטגרל מתבדר.

דוגמא

האם $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ מתכנס?

תשובה

כידוע $\int_1^b \frac{dx}{x} = \ln(x)\Big|_1^b = \ln(b) - \ln(1) = \ln(b).$, ולכן $\lim_{b\to\infty} \ln(b) = \infty.$, ולכן האינטגרל מתבדר.

טענה התכנסות שקולה לחסימות

נתונה פונקציה רציפה ואי שלילית f על הקרן $[K,\infty)$. אז הטענות הבאות שקולות:

א. האינטגרל $\int_K^\infty f(t)dt$ מתכנס.

ב. האינטגרל $\int_K^\infty f(t)dt$ חסום מלעיל.

הוכחה

כיון שהנגזרת של $\int_K^b f(t)dt$ היא $f(b)>0$ כלומר הנגזרת חיובית, אז $\int_K^b f(t)dt$ היא פונקציה עולה של b, ולכן (כמו משפט וירשטרס לסדרות) מספיק להראות כי $\int_K^b f(t)dt$ היא פונקציה חסומה מלעיל. ■

מבחן האינטגרל

נתונה פונקציה f ונתון שיש K טבעי כך שבקטע $[K,\infty)$ הפונקציה יורדת במובן הרחב, וכן $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$. אז הטענות הבאות שקולות:

א. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f(n+K)$ מתכנס.

ב. האינטגרל $\int_K^{\infty} f(t)dt$ מתכנס.

וכמו כן שתי הטענות הבאות שקולות:

ג. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f(n+K)$ מתבדר.

ד. האינטגרל $\int_K^{\infty} f(t)dt$ מתבדר.

הוכחה

כיון ש-ג היא הטענה ההפוכה ל-א, ו-ד הפוכה ל-ב, אז אם נוכיח כי א שקולה ל-ב, מכאן ינבע כי ג שקולה ל-ד.

כיון ש f חיובית א שקול לכך כי $\sum_{n=1}^{\infty} f(n+K)$ חסום ו-ב שקול לכך כי $\int_K^{\infty} f(t)dt$ חסום, ונוכיח שקילות בין החסימויות.

אי השויונים $\sum_{n=1}^{\infty} f(n+K) \le \int_K^{\infty} f(t)dt \le \sum_{n=1}^{\infty} f(n+K-1)$ שאותם מוכיחים בציור, מראים כי חסימות מלעיל של הטור הימני גוררת חסימות מלעיל של האינטגרל אשר גוררת חסימות מלעיל של הטור השמאלי, אבל חסימות הטור הימני והשמאלי שקולות, כיון שההפרש ביניהם הוא האבר הקבוע f(K). ■

דוגמא

בדוק את התכנסות הטור $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$.

תשובה

ראינו כי הטור $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}}$ מתכנס עבור $2\le\alpha$ ומתבדר $\alpha\le1$ עבור ולא הוכחנו התכנסות או התבדרות עבור $1<\alpha<2$. עבור תחום זה נביט בפונקציה $f=\frac{1}{x^{\alpha}}=x^{-\alpha}$. פונקציה זו רציפה וגזירה, ונגזרתה היא , כלומר $\frac{-\alpha}{x^{\alpha+1}}$ הנגזרת שלילית ולכן f יורדת בקטע $[1,\infty)$. מתקיימים תנאי משפט האינטגרל ולכן התכנסות או התבדרות הטור שקולה בהתאמה לחסימות או אי חסימות האינטגרל $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$. נחשב ונקבל $\lim_{b\to\infty}\int_{1}^{b}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim_{b\to\infty}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_{1}^{b}=\lim_{b\to\infty}\frac{b^{1-\alpha}-1^{1-\alpha}}{1-\alpha}$, כיון ש $1<\alpha<2$, נובע כי $1-\alpha<0$ ולכן $\lim_{b\to\infty}\frac{b^{1-\alpha}-1^{1-\alpha}}{1-\alpha}=\frac{0-1^{1-\alpha}}{1-\alpha}=\frac{1}{\alpha-1}$. כלומר האינטגרל חסום ולכן הטור מתכנס.

מסקנה

הטור $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}}$ מתכנס עבור $1<\alpha$ ומתבדר עבור $\alpha\le1$.

מבחן השואת הגבולות מקרה ראשון

נתונות סדרות חיוביות a_n,b_n, ונתון כי מתקיים $\exists\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=L$. אם L=0, והטור $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנס, אז גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס.

נשים לב כי כיון שהסדרות המקוריות חיוביות, אז בעצם L=0+.

הוכחת מקרה ראשון

נבחר $\varepsilon=1$. אז לפי הגדרת הגבול, קים 0<K, כך שעבור K<n מתקיים $0-1<\frac{a_n}{b_n}<0+1$. כיון שהסדרות חיוביות נובע כי $0<\frac{a_n}{b_n}<1$, ולכן עבור K<n נובע כי $a_n<b_n$, ולכן לפי משפט מחיקת K האיברים הראשונים, נובע הטורים המחוקים

מקימים כי $a_n < b_n$, ולכן לפי משפט ההשואה התכנסות $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

גוררת את התכנסות $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ■

מבחן השואת הגבולות מקרה שני

נתונות סדרות חיוביות a_n, b_n , ונתון כי מתקיים $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$. אם

L=∞, והטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס.

הוכחת מקרה שני

כיון ש $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$, נובע כי $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{\infty} = 0.$ ולכן מקרה ב נובע

ממקרה א. ■

מבחן השואת הגבולות מקרה שלישי

נתונות סדרות חיוביות a_n, b_n , ונתון כי מתקיים $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$. אם

0<L<∞, התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ שקולה להתכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

הוכחת מקרה שלישי

כיון ש 0<L<∞, נבחר $\varepsilon = \frac{L}{2}$. אז לפי הגדרת הגבול, קים 0<K,

כך שעבור K<n מתקיים $\frac{L}{2} = L - \frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < L + \frac{L}{2} = \frac{3L}{2}$. ולכן עבור

K<n נובע כי $b_n \frac{L}{2} < a_n < \frac{3L}{2} b_n$, ולכן לפי משפט מחיקת K

האיברים הראשונים, נובע הטורים המחוקים מקימים כי

$b_n \frac{L}{2} < a_n < \frac{3L}{2} b_n$. התכנסות $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ גוררת כי $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ חסום וכפל

בקבוע גורר כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3Lb_n}{2}$ חסום ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חסום ולכן מתכנס.

נכתוב את אי השויון $b_n \frac{L}{2} < a_n$ בצורה $b_n < \frac{2a_n}{L}$. התכנסות $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ גוררת כי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חסום ולכן גם $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_n}{L}$ חסום ולכן גם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ חסום ולכן מתכנס. ■

דוגמא

בדוק האם $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-3n+4}{5n^4-6n^3+7n^2-8n+9}$ מתכנס.

תשובה

נגדיר $b_n = \frac{1}{n^2}, a_n = \frac{2n^2-3n+4}{5n^4-6n^3+7n^2-8n+9}$, ונשתמש במשפט השואת הגבול. אז מתקיים

$\frac{a_n}{b_n} = \frac{2n^4-3n^3+4n^2}{5n^4-6n^3+7n^2-8n+9}, \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{2}{5} = L, 0 < L < \infty$ ולכן לפי משפט השואת הגבול מקרה 3 נובע כי התכנסות או התבדרות כל אחד מהטורים גוררת בהתאמה את התכנסות או התבדרות הטור השני. ידוע כי $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס, ולכן גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

מבחן השואת המנות

נתונים שני טורים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ חיוביים. נניח כי קים 0<K טבעי כך ש $(n > K) \to (\frac{a_n}{a_{n-1}} \le \frac{b_n}{b_{n-1}})$. אז א. התכנסות $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ גוררת התכנסות $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. ב. התבדרות $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ גוררת התבדרות $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

הוכחה

על ידי משפט אפשר למחוק את K האיברים הראשונים ומסקנות המשפט לא תשתננה. אז מתקיים

$0 \le \frac{a_2}{a_1} \le \frac{b_2}{b_1}, 0 \le \frac{a_3}{a_2} \le \frac{b_3}{b_2}, \cdots, 0 \le \frac{a_n}{a_{n-1}} \le \frac{b_n}{b_{n-1}}$, ולכן נכפל ונקבל $0 \le \Pi \frac{a_{i+1}}{a_i} \le \Pi \frac{b_{i+1}}{b_i}$ או מה ששקול $0 \le \frac{a_n}{a_1} \le \frac{b_n}{b_1}$ או מה ששקול

$a_n \le \frac{b_n a_1}{b_1}$. אם נתון כי $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס, אז $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ חסום, ואז $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n a_1}{b_1}$ חסום ואז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חסום $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ולכן מתכנס. וראינו כי א גורר את ב.

יש שתי הוכחות לכך שב גורר את א

הוכחה ראשונה. נכתוב את $0 \le \frac{a_n}{a_1} \le \frac{b_n}{b_1}$ בצורה $\frac{a_n b_1}{a_1} \le b_n$ ולכן אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר אז הוא לא חסום ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n b_1}{a_1}$ איננו חסום ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ איננו חסום ולכן מתבדר.

הוכחה שניה

נסמן את הטענה $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס באות p, את הטענה $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס באות q ואז הנסוח של טענה א הוא p→q, אז הטענה $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתבדר היא $\bar{p}$ והטענה $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר היא $\bar{q}$ והנסוח של טענה ב הוא $\bar{q} \to \bar{p}$, וידוע בלוגיקה כי טענה זו שקולה לטענה p→q. ■

אין דוגמא לשימוש. חשיבות משפט השואת המנות היא בכך שהוא טענת עזר במשפט הבא, אשר יש לו הרבה דוגמאות.

משפט המנות של ד'אלמברט, גרסת האיברים.

נתונה סדרה חיובית a_n נניח כי קים 0<K טבעי

א. כך ש $(n > K) \to (1 \le \frac{a_{n+1}}{a_n})$. אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

ב. וקים מספר 0<q<1 כך ש $(n > K) \to (\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q)$. אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

הוכחה

הוכחת המשפט נובעת ממשפט השואת המנות. א. הנתון $1\le\frac{a_{n+1}}{a_n}$ ניתן להכתב בצורה $\frac{1^{n+1}}{1^n}\le\frac{a_{n+1}}{a_n}$, ולכן לפי חלק ב של משפט השואת המנות, ומכיון שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}1^n$ מתבדר, לכן גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתבדר. ב. הנתון $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le q$ ניתן להכתב בצורה $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{q^{n+1}}{q^n}$, ולכן לפי חלק ב של משפט השואת המנות, ומכיון שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}q^n$ מתכנס, לכן גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס. ■

משפט המנות של ד'אלמברט גרסת הגבול

נתונה סדרה חיובית a_n נניח כי קים $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L$

א. אם L<1 הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס.

ב. אם 1<L הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתבדר

הוכחה

אם 1<L, נבחר $\varepsilon=\frac{L-1}{2}$. אז $[L-\varepsilon,L+\varepsilon]=[\frac{L+1}{2},\frac{2L-1}{2}]$, ומתקיים כי $1=\frac{1+1}{2}<\frac{L+1}{2}$ ולכן קיים 0<K כך ש $(n>K)\to(1\le\frac{a_{n+1}}{a_n})$, ולכן לפי משפט ד'אלמברט, גרסת האיברים, הטור מתבדר.

אם L<1, נבחר $\varepsilon=\min\{\frac{1-L}{2},L\}$. אז $[L-\varepsilon,L+\varepsilon]\subseteq[0,\frac{1+L}{2}]$,
ומתקיים כי $q=\frac{L+1}{2}<1$ ולכן קיים 0<K כך ש
$(n>K)\to(\frac{a_{n+1}}{a_n}\le q<1)$, ולכן לפי משפט ד'אלמברט, גרסת האיברים, הטור מתכנס. ■

דוגמאות

בדוק את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$.

תשובה

$L = q = \lim_{n\to\infty} \frac{q^{n+1}}{q^n} = q, \frac{q^{n+1}}{q^n}$ ולכן הטור מתכנס עבור q<1 ומתבדר עבור 1<q,
כלומר קבלנו את הדוגמא הראשונה של טור הנדסי.

בדוק את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

תשובה

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1}$, ולכן $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0.$, ומכיון שהגבול קטן מ-1,
הטור מתכנס.

בדוק את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$

תשובה

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)x^{n+1}}{nx^n} = \frac{(n+1)x}{n}$, ולכן $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}x = x.$, ואם x<1, הטור
מתכנס, אם 1<x, הטור מתבדר. אם x=1, נציב בנוסחת האבר הכללי ונקבל כי הטור מתבדר.

משפט השורש של קושי, גרסת האיברים

נתונה סדרה חיובית a_n נניח כי קים 0<K טבעי

א. כך ש $(n > K) \to (1 \le \sqrt[n]{a_n})$. אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

ב. וקים מספר 0<q<1 כך ש $(n > K) \to (\sqrt[n]{a_n} \le q)$. אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

הוכחה.

נעלה את אי השויונים בנתון בחזקת n. אז מקרה א הופך להיות $(n>K)\to(1\le a_n)$, ולפי מבחן ההשואה הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.
מקרה ב הופך להיות $(n>K)\to(a_n\le q^n)$ ומתוך השואה לטור גיאומטרי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס. ■

משפט השורש של קושי, גרסת הגבול

נתונה סדרה חיובית a_n נניח כי קים $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=L$

א. אם L<1 הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.
ב. אם 1<L הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר

הוכחה

אם 1<L, נבחר $\varepsilon=\frac{L-1}{2}$. אז $[L-\varepsilon,L+\varepsilon]=[\frac{L+1}{2},\frac{2L-1}{2}]$, ומתקיים כי $1=\frac{1+1}{2}<\frac{L+1}{2}$ ולכן קיים 0<K כך ש $(n>K)\to(1\le\sqrt[n]{a_n})$, ולכן לפי משפט קושי, גרסת האיברים, הטור מתבדר.

אם L<1, נבחר $\varepsilon=\frac{1-L}{2}$. אז $[L-\varepsilon,L+\varepsilon]\subseteq[\frac{2L-1}{2},\frac{1+L}{2}]$, ומתקיים כי $q=\frac{L+1}{2}<1$ ולכן קיים 0<K כך ש $(n>K)\to(\sqrt[n]{a_n}\le q<1)$, ולכן לפי משפט קושי, גרסת האיברים, הטור מתכנס. ■

דוגמאות

בדוק את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$.

תשובה

$\sqrt[n]{q^n}=q,\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{q^n}=q=L$ ולכן הטור מתכנס עבור q<1 ומתבדר עבור 1<q,
כלומר קבלנו את הדוגמא הראשונה של טור הנדסי.

בדוק את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 q^n$

תשובה

$\sqrt[n]{n^2 q^n} = (\sqrt[n]{n})^2 q, \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n})^2 = q1^2 = q = L$ ולכן הטור מתכנס עבור q<1 ומתבדר עבור 1<q

מבחן ראבה גרסת האיברים.

נתונה סדרה חיובית a_n נניח כי קים 0<K טבעי

א. כך ש $(n > K) \to (n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) \le 1)$. אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

ב. וקים מספר 1<p כך ש $(n > K) \to (p \le n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1))$. אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

הערה:

משפט ראבה איברים כולל בחובו את משפט ד'אלמברט איברים כמקרה פרטי. אם נתון שיש 0<K כך ש $(n > K) \to (1 \le \frac{a_{n+1}}{a_n})$, אז נובע כי עבור n-ים גדולים $\frac{a_n}{a_{n+1}} \le 1$, ולכן $\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \le 0$ ולכן $n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) \le 0$ ולכן $n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) \le 1$ ולכן לפי משפט ראבה איברים הטור מתבדר. אם נתון שיש 0<K כך ש $(n > K) \to (\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q < 1)$, אז נובע כי עבור n-ים גדולים $1 < \frac{1}{q} \le \frac{a_n}{a_{n+1}}$, ולכן $0 < \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1$ ולכן $n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1)$ שואף לאינסוף ולכן עבור כל p חיובי ו n גדול $p \le n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1)$ ולכן לפי משפט ראבה איברים הטור מתכנס.

הוכחה.

בכל מקרה על ידי משפט מחיקת האיברים אפשר להניח כי אי השויונים נכונים עבור כל n.

מקרה א

לפי מבחן השואת $[n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)\le 1]\to(\frac{a_n}{a_{n+1}}\le 1+\frac{1}{n}=\frac{n+1}{n})\to(\frac{1/(n+1)}{1/n}\le\frac{n}{n+1}\le\frac{a_{n+1}}{a_n})$

המנות, וכיון שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ מתבדר, הרי שגם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתבדר.

מקרה ב

$$[p\le n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)]\to((\frac{n+1}{n})^{(1+p)/2}\le * \le 1+\frac{p}{n}\le\frac{a_n}{a_{n+1}})\to(\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{(1/(n+1)^{(1+p)/2})}{(1/n)^{(1+p)/2}})$$

כאשר את אי השויון המסומן * נוכיח מיד. לפי מבחן השואת המנות, וכיון ש 1<(1+p)/2 אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{(1+p)/2}}$ מתכנס, הרי שגם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס. נוכיח כעת את אי השויון המסומן *.

$$[(\frac{n+1}{n})^{(1+p)/2}\le 1+\frac{p}{n}]\leftrightarrow[\frac{(\frac{n+1}{n})^{(1+p)/2}-1}{1/n}\le p]\leftrightarrow[\frac{(1+(1/n))^{(1+p)/2}-1}{1/n}\le p].$$

נפעיל על הבטוי השמאלי בטענה הימנית גבול כאשר n שואף לאינסוף. אז המונה והמכנה שואפים ל-0 ולכן ניתן להפעיל את כלל ליהופיטל ונקבל

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1+(1/n))^{(1+p)/2}-1}{1/n}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{(1+p)/2}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{((1+p)/2)(1+x)^{((1+p)/2)-1}}{1}=\frac{1+p}{2}$$

. כיון שמתקיים (1+p)/2<p, נבחר $\varepsilon=\frac{p-1}{2}$, ואז

$(\frac{1+p}{2}-\varepsilon,\frac{1+p}{2}+\varepsilon)=(1,p)$ כלומר יש 0<M, כך שעבור M<n מתקיים אי השויון *. לכן בהוכחת מקרה ב, יש למחוק את max{K,M} האיברים הראשונים, כאשר M הוא מספר האיברים שלא בהכרח מקיימים את אי השויון *, ו K הוא מספר האיברים שלא בהכרח מקיימים את ההנחה $p\le n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)$.

■

מבחן ראבה גרסת הגבול.

נתונה סדרה חיובית a_n נניח כי קים $\lim_{n\to\infty}n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=L$

א. אם 1<L אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

ב. אם L<1 אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

הוכחה : א. נבחר $\varepsilon = (L-1)/2$ ואז $(\mathrm{L}-\varepsilon, L+\varepsilon) = (\frac{L+1}{2}, \frac{3L-1}{2})$ ולכן למעט מספר סופי של איברים שאר האיברים $n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)$ מקיימים כי הם גדולים מהמספר 1+L)/2) ולכן גם גדולים ממספר הגדול מ-1. לפי משפט ראבה איברים הטור מתכנס. ב. אם L<1, נבחר $\varepsilon = \frac{1-L}{2}$. אז $[L-\varepsilon, L+\varepsilon] \subseteq [\frac{2L-1}{2}, \frac{1+L}{2}]$, ולכן למעט מספר סופי של איברים שאר האיברים $n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)$ מקיימים כי הם קטנים מהמספר L+1)/2) ולכן גם קטנים מ-1 לפי משפט ראבה איברים הטור מתבדר. ■

דוגמא

בדוק האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$ מתכנס או מתבדר.

תשובה

ננסה את מבחן ד'אלמברט. אז

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{e^n n!} = e(\frac{n}{n+1})^n = \frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n}, \lim_{n\to\infty} \frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{e}{e} = 1$, ולכן מבחן ד'אלמברט גבול נכשל.

פתרון א

לפי ד'אלמברט איברים, כיון שהסדרה $(1+\frac{1}{n})^n$ היא סדרה עולה שגבולה e הרי שהמנות $\frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n}$ כולן גדולות או שוות ל-1 ולכן הטור מתבדר לפי ד'אלמברט איברים.

פתרון ב

ננסה את מבחן ראבה וגם נשתמש בכלל ל'הופיטל.

$$n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=n(\frac{1}{e}(\frac{n+1}{n})^n-1)=\frac{(1+\frac{1}{n})^n-e}{\frac{e}{n}},\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^n-e}{\frac{e}{n}}=\frac{0}{0},x=\frac{1}{n},\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^n-e}{\frac{e}{n}}=\lim_{x\to0+}\frac{(1+x)^{1/x}-e}{x},$$

$$(1+x)^{1/x}=e^{\frac{\ln(1+x)}{x}},[(1+x)^{1/x}]'=e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}(\frac{\frac{x}{(x+1)}-\ln(1+x)}{x^2})=(1+x)^{1/x}(\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(x+1)})=$$

$$=\frac{(1+x)^{1/x}}{(1+x)}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}.\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{1/x}-e}{x}\doteq\frac{e}{1}\frac{\lim_{x\to0}(1-\ln(1+x)-\frac{1+x}{1+x})}{2x}=\frac{-e}{2}\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\frac{-e}{2}$$

לכן הטור מתבדר.

דוגמאות נוספות

בדוק האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}$ מתכנס או מתבדר.

תשובה

ננסה את מבחן ד'אלמברט. אז

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}\ \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{4^{n+1}((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}:\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}=\frac{4^n(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{2n+2}{2n+1},\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$, ולכן

ולכן מבחן ד'אלמברט גבול נכשל.

המשך פתרון

ננסה את מבחן ראבה :.

$$n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=n(\frac{2n+1}{2n+2}-1)=-\frac{1}{2n+2}n,\lim_{n\to\infty}n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=\frac{-1}{2}$$

לכן הטור מתבדר.

עוד דוגמא

לאלו ערכי b הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^b}$ מתכנס?

תשובה

ננסה את מבחן ד'אלמברט. אז $1 = \frac{1}{1^b} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^b} = \frac{n^b}{(n+1)^b} = \frac{a_{n+1}}{a_n}\ \frac{1}{n^b}\sum_{n=1}^{\infty}$,

ולכן מבחן ד'אלמברט גבול נכשל.

המשך פתרון

ננסה את מבחן ראבה :.

$$n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1) = n((1+\frac{1}{n})^b-1) = \frac{(1+\frac{1}{n})^b-1}{\frac{1}{n}}, \lim_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1) = \lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^b-1}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^b-1}{x} = \frac{0}{0} \doteq$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{b(1+x)^{b-1}}{1} = b$$

לכן הטור מתכנס אם $b>1$, מתבדר אם $b<1$ מתכנס ואין מסקנה לפי ראבה עבור $b=1$

טורים כלליים

עד עתה עסקנו בטורים של סדרות חיוביות. נבע שסדרת הסכומים החלקיים עולה ולכן מתכנסת אם ורק אם היא חסומה.

עבור טורים של סדרות כלשהן, אין הקשר בין חסימות והתכנסות.

התכנסות בהחלט ובתנאי

נתונה סדרה a_n . נגיד כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ של הסדרה $|a_n|$ מתכנס. כיון שהסדרה היא אי שלילית, הרי לגביה תקפים כל המשפטים הקודמים.

משפט

אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט, אז הוא מתכנס.

ההוכחה מתבססת על סמך קריטריון קושי שאותו לא הספקנו ללמוד.

דוגמא

האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ מתכנס?

תשובה

נביט על סדרת הערכים המוחלטים $\frac{1}{n^2}$. ידוע כי הטור שלה מתכנס ולכן הטור המקורי מתכנס בהחלט ולכן הטור מתכנס.

משפט לייבניץ

נתונה סדרה a_n ונתון כי יש 0<K כך שעבור K<n האיברים חיוביים, והם סדרה היורדת ל-0. אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ מתכנס. נסמן את גבולו ב-S. יהי נתון מספר טבעי m, כך ש K<2m. אז מתקיים כי $S_{2m+1} \le S \le S_{2m}$. כאשר נזכר כי $S_p = \sum_{n=1}^{p} (-1)^n a_n$.

הוכחה

עבור K<2m מתקיים כי $S_{2m} = S_{2m-1} + (-1)^{2m} a_{2m} > S_{2m-1}$, וכן

$S_{2m+1} = S_{2m} + (-1)^{2m+1} a_{2m+1} < S_{2m}$ וכן

$S_{2m+1} = S_{2m-1} + (-1)^{2m} a_{2m} + (-1)^{2m+1} a_{2m+1} = S_{2m-1} + a_{2m} - a_{2m+1} > S_{2m-1}$ וכן

$$S_{2m+2} = S_{2m} + (-1)^{2m+1} a_{2m+1} + (-1)^{2m+2} a_{2m+2} = S_{2m} - a_{2m+1} + a_{2m+2} = S_{2m} - (a_{2m+1} - a_{2m+2}) < S_{2m}$$

, ולכן נסכם זאת כך $S_{2m-1} \le S_{2m+1} \le S_{2m+2} \le S_{2m}$. לכן תת סדרת הסכומים החלקיים בעלי אינדכס זוגי היא יורדת, תת סדרת הסכומים החלקיים

בעלי אינדכס אי זוגי היא עולה. לכל שני אינדכסים $K<2m+1$, $K<2j$ נוכיח כי $S_{2m+1} \le S_{2j}$, ואכן נבחר אינדכס k המקיים $\max\{m,j\}\le k$ מתקיים $2m+1\le 2k+1, 2j\le 2k$, ומכאן נובע $S_{2m+1} \le S_{2k+1} \le S_{2k} \le S_{2j}$ ונובע כי כל אחד מאיברי הסכומים החלקיים הזוגיים גדול מכל אחד מאיברי הסכומים החלקיים האי זוגיים.

נסכם זאת כך, S_m מתחלקת לשתי תתי סדרות, S_{2m+1} שהיא תת סדרה עולה, ו S_{2m} שהיא תת סדרה יורדת, באופן שכל איבר של תת הסדרה היורדת גדול מכל איבר של תת הסדרה העולה.

השלב הבא בהוכחת משפט לייבניץ (וגם בהוכחת משפט ערך הביניים של קושי וגם בהוכחת המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי) הוא להראות כי המרחק בין תת הסדרות העולה והיורדת שואף ל-0. ואכן מתקיים כי $S_{2k} - S_{2k+1} = a_{2k+1}$ וזו לפי ההנחה שואפת ל-0.

לכן קים גבול לסדרה S_m וזהו הגבול של טור לייבניץ S.
כיון שהגבול הוא גם של תת הסדרה העולה וגם של היורדת,
הרי שלכל n מתקיים כי $S_{2n+1}\le S\le S_{2n}$. ■

הערה: מצב שבו סדרה מתחלקת לשתי תתי סדרות, אחת עולה, אחת יורדת, ושכל אבר של הסדרה היורדת גדול מכל אבר של הסדרה העולה, כבר היה לנו פעמיים.

מקרה ראשון היה בהוכחת תכונת ערכי הביניים של קושי (עבור פונקציה רציפה). אז היתה לנו סדרה יורדת b_n וסדרה עולה a_n, כך ש b_n סמנה את הקצוות הימניים של סדרת קטעים אשר כל קטע מוכל בקטע הקודם לו, ו a_n סמנה את הקצוות השמאליים של אותה סדרת קטעים, ולכן מתקיים כי לכל m,n . $a_n\le b_m$.

מקרה שני היה בהוכחת המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והעובדה כי האינטגרל הוא גבול של סכומי דרבו עליונים ושל סכומי דרבו תחתונים. אז סכומי דרבו העליונים יורדים ככל שיש יותר נקודות חלוקה, וסכומי דרבו התחתונים עולים ככל שיש יותר נקודות חלוקה, וכל סכום דרבו עליון גדול מכל סכום דרבו תחתון. רק הבדל יחיד הוא שסכומי דרבו אינם בדיוק סדרה, לא תלויים רק באינדכס טבעי n, אלא בקבוצת אינדכסים יותר מסובכת.

דוגמא

בדוק את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

תשובה

הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n}$ הוא טור לייבניץ כיון שהסדרה $a_n=\frac{1}{n}$ יורדת ל-0. הטור שלנו הוא מינוס של טור מתכנס ולכן מתכנס.

האם הוא מתכנס בהחלט? הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ הוא טור הרמוני ומתבדר ולכן הטור המקורי אינו מתכנס בהחלט.

טור אשר מתכנס ואשר איננו מתכנס בהחלט נקרא מתכנס בתנאי.
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ הוא טור מתכנס בתנאי.

לומדים בקורס נומרית כי סכום הטור הזה הוא ln2.

תרגיל

הערך את ln2 ברמת דיוק 0.2.

תשובה

כיון שהטור הוא מינוס של טור לייבניץ מתחלף המצב, תת סדרת הסכומים החלקיים הזוגיים עולה והאי זוגיים יורדת. לכן

$$S_4=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\le \ln 2\le S_5=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\rightarrow\frac{60-30+20-15}{60}\le \ln 2\le\frac{60-30+20-15+12}{60}$$
$$\rightarrow\frac{35}{60}\le \ln 2\le\frac{47}{60}\rightarrow 0.583333\le \ln 2\le 0.783333$$

, וקבלנו קטע באורך 0.2 אשר מכיל את ln2. אכן לפי מחשבון נמצא ln2=0.6931 בקטע זה.

משפט של קושי אודות טור המתכנס בתנאי.

נתון טור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ המתכנס בתנאי לסכום S. אז ניתן לשנות את סדר המחוברים בטור כך שיתכנס לכל מספר ממשי (כולל ±∞).

המשפט ללא הוכחה אבל עם דוגמא

נביט על $\ln 2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$, ונשנה את סכום האיברים כך

$$\ln 2=(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12})+\cdots=\frac{1}{4}+\frac{1}{24}+\frac{1}{60}+\cdots=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots)=\frac{1}{2}\ln 2$$

. הסתירה התקבלה מכך ששינינו את סדר המחוברים והיא דוגמא למשפט קושי.

נמשיך את הדוגמא הקודמת באותיות:

$$(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n})=\frac{4n-2n-(2n-1)}{4n(2n-1)}=\frac{1}{4n(2n-1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}).$$

מבחני אבל ודיריכלה

משפט דיריכלה

נתון הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, וידוע כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ חסום וכי הסדרה a_n מונוטונית ושואפת ל-0. אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

דוגמא

נביט בדוגמא שבה הסדרה a_n חיובית ויורדת ל-0 ובה $b_n=(-1)^n$. אז סדרת הסכומים החלקיים של b_n היא מחזורית ושוה ל 1,0- ולכן היא חסומה ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ הוא טור לייבניץ, כלומר משפט לייבניץ הוא מקרה פרטי של משפט דיריכלה.

דוגמא

נביט בטור $3-1-\frac{1}{3}+\frac{3}{4}-\frac{2}{5}-\frac{1}{6}+\frac{3}{7}-\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+\cdots$. אז כדי להשתמש במשפט דיריכלה, עלינו לזהות את a_n,b_n שיתאימו למשפט דיריכלה. נבחר

$a_n=\frac{1}{n}$ והיא אכן חיובית ויורדת ל-0 ונבחר $b_n=3,-2,-1,3,-2,-1$. אז אכן $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ הוא הטור הנתון סדרת הסכומים החלקיים של b_n היא 3,1,0,3,1,0 מחזורית וחסומה ולכן הטור מתכנס לפי משפט דיריכלה.

משפט אבל

נתון הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$, וידוע כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ טור מתכנס וכי הסדרה a_n מונוטונית וחסומה. אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ מתכנס.

טענה :

משפט אבל נובע ממשפט דיריכלה

הוכחה

נניח כי אכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ טור מתכנס וכי הסדרה a_n מונוטונית וחסומה. אז (לפי משפט) a_n מתכנסת ונסמן $a=\lim_{n\to\infty}a_n$ אז a_n-a מונוטונית ושואפת ל-0, ומתקיים $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a+a)b_n=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a)b_n+a\sum_{n=1}^{\infty}b_n.$. אז לפי הנתון $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנס ולכן גם $a\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנס. כיון ש $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנס הוא גם חסום, ו (a_n-a) מונוטונית שואפת ל-0, ולכן $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a)b_n.$ מתכנס על סמך משפט דיריכלה. לכן $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a)b_n+a\sum_{n=1}^{\infty}b_n.$ מתכנס כי הוא סכום של טורים מתכנסים. ■

דוגמא

נביט בטור $2-\frac{2.25}{2}+\frac{(4/3)^3}{3}-\frac{(5/4)^4}{4}-\frac{(6/5)^5}{5}+\cdots$. אז כדי להשתמש במשפט אבל נגדיר $a_n=(1+\frac{1}{n})^n,\lim_{n\to\infty}a_n=e$ ואכן הסדרה עולה וחסומה ומתכנסת לe-.

נגדיר $b_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ אז $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנס בתור (מינוס של) טור לייבניץ ואכן $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n.$ הוא הטור הנתון והוא מתכנס לפי משפט אבל.

הוכחת משפט דיריכלה עבור המקרה ש a_n חיובית ויורדת ל-0. נסמן חסם של הטור $|\sum_{k=1}^{n} b_k|$ בתור M>0. אז

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} b_k, \sum_{k=n}^{n+m} s_k(a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=n+1}^{n+m-1} a_k(s_k - s_{k-1}) + s_n a_n - s_{n+m}a_{n+m+1} = \sum_{k=n+1}^{n+m-1} a_k b_k + s_n a_n - s_{n+m}a_{n+m+1}$$
$$\to \sum_{k=n+1}^{n+m-1} a_k b_k = \sum_{k=n}^{n+m} s_k(a_k - a_{k+1}) - s_n a_n + s_{n+m}a_{n+m+1},$$
$$|\sum_{k=n+1}^{n+m-1} a_k b_k| = |\sum_{k=n}^{n+m} s_k(a_k - a_{k+1}) - s_n a_n + s_{n+m}a_{n+m+1}| \le |\sum_{k=n}^{n+m} s_k(a_k - a_{k+1})| + |s_n a_n| + |s_{n+m}a_{n+m+1}| \le$$
$$\le \sum_{k=n}^{n+m} s_k(a_k - a_{k+1}) + s_{n+m}a_{n+m+1} + s_n a_n \le M(\sum_{k=n}^{n+m}(a_k - a_{k+1}) + a_{n+m+1} + a_n) = M\,2a_n.$$

יהי $\varepsilon > 0$. קים $P > 0$ כך ש $(n > P) \to (a_n < \frac{\varepsilon}{2M})$ ועבור $n > P$ מתקיים $|\sum_{k=n+1}^{n+m-1} a_n b_n| < \varepsilon$, ולפי תנאי קושי להתכנסות טורים הטור מתכנס.

מבחני אבל ודיריכלה עבור אינטגרלים לא אמיתיים

נתון האינטגרל הלא אמיתי $\int_a^{\infty} f(t)g(t)dt$

משפט דיריכלה אם f(t) מתכנסת מונוטונית ל-0 ו $\int_a^{\infty} g(t)dt$ חסומה, אז האינטגרל המקורי מתכנס.

משפט אבל אם f(t) מונוטונית וחסומה ו $\int_a^{\infty} g(t)dt$ מתכנס, אז האינטגרל המקורי מתכנס.

דוגמא:

האם $\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin t dt}{t}$ מתכנס?

תשובה

כן על סמך משפט דיריכלה אם נגדיר $f(t) = \frac{1}{t}, g(t) = \sin(t)$. אז f(t) מונוטונית שואפת ל-0, ומתקיים כי לכל x,

$\int_{\pi}^{x} \sin(t)dt = \cos(\pi) - \cos(x), |\int_{\pi}^{x} \sin(t)dt| \le 1 + 1 = 2.$ ולכן מתקיים תנאי החסימות.

סכום מבחני טורים

1. (מבחן הזנב) הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו $\sum_{n=K+1}^{\infty} a_n$ מתכנסים ומתבדרים כאחד, אבל לא לאותו סכום והפרש הגבולות ביניהם הוא $\sum_{n=1}^{K} a_n$.

2. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אז $\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$

מבחנים לטורים חיוביים. בכל טור שכזה $\exists K$ כך ש $(n > K) \to (0 \le a_n).$
מעתה לא נכתוב זאת יותר ונניח אמירה זו בכל סעיף. כל ההנחות תהיינה בנוסף על הנחה זו.

3 מבחן ההשוואה : אם $\exists M, (n > M) \to (0 \le a_n \le b_n).$ אז :

א. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס גורר כי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

ב. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר גורר כי $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתבדר.

4. מבחן השואת הגבול : אם $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ אז :

א. $0 < L < \infty$ אז התכנסות $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ שקולה להתכנסות $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. התבדרות $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ שקולה להתבדרות $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

ב. $L = 0$ אז התכנסות $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ גוררת התכנסות $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. התבדרות $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ גוררת התבדרות $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

ג. $L = \infty$ אז התבדרות $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ גוררת התבדרות $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. התכנסות $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ גוררת התכנסות $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

5. מבחן האינטגרל נתונה פונקציה f המקיימת כי $\exists\lim_{x\to\infty} f(x)=0$
וכי $\exists M,(x>M)\to(f(x)\downarrow)$. אז התכנסות $\int_M^\infty f(x)dx$ שקולה
להתכנסות $\sum_{n=M}^\infty f(n)$, אבל הגבולות לאו דוקא שוים.

6. מבחן השואת המנות : אם $\exists M,(n>M)\to(\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{b_{n+1}}{b_n})$. אז :

א. $\sum_{n=1}^\infty b_n$ מתכנס גורר כי $\sum_{n=1}^\infty a_n$ מתכנס.

ב. $\sum_{n=1}^\infty a_n$ מתבדר גורר כי $\sum_{n=1}^\infty b_n$ מתבדר.

7. מבחן המנה של ד'אלמברט גרסת האיברים : א. קימים $q<1$
ו- $M>0$ כך ש- $(n>M)\to(\frac{a_{n+1}}{a_n}\le q)$. אז הטור מתכנס.

ב.קים $M>0$ כך ש- $(n>M)\to(1\le\frac{a_{n+1}}{a_n})$. אז הטור מתבדר.

גרסת הגבול $\exists\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L$. אז עבור א. $L<1$ הטור מתכנס. ב. $1<L$
הטור מתבדר. ג. $1=L$ המבחן נכשל.

8. מבחן השרש של קושי גרסת האיברים : א. קימים $q<1$ ו-
$M>0$ כך ש- $(n>M)\to(\sqrt[n]{a_n}\le q)$. אז הטור מתכנס.

ב.קים $M>0$ כך ש- $(n>M)\to(1\le\sqrt[n]{a_n})$. אז הטור מתבדר.

גרסת הגבול $\exists\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=L$. אז עבור א. $L<1$ הטור מתכנס. ב. $1<L$
הטור מתבדר. ג. $1=L$ המבחן נכשל.

1. מבחן ראבה גרסת האיברים : א. קימים $1<q$ ו- $M>0$ כך
ש- $(n>M)\to(q\le n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1))$. אז הטור מתכנס.

ב.קים $M>0$ כך ש- $(n>M)\to(n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)<1)$. אז הטור מתבדר.

גרסת הגבול $\exists\lim_{n\to\infty}n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=L$. אז עבור א. $L<1$ הטור מתבדר. ב.
$1<L$ הטור מתכנס. ג. $1=L$ המבחן נכשל.

מבחנים עבור טורים כלליים (לא מניחים יותר שזנב הסדרה
מורכב מאיברים אי שליליים).

1. $\sum_{n=1}^\infty |a_n|$ מתכנס גורר כי $\sum_{n=1}^\infty a_n$ מתכנס.

2. מבחן לייבניץ : $\exists K$ כך ש $(n>K)\to(0\le a_n)$. אז $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ מתכנס לגבול L, ולכל $n>K/2$ מתקיים $S_{2n}\le L\le S_{2n+1}$.

3. מבחן דיריכלה : $\exists K$ כך ש $(n>K)\to(0\le a_{n+1}\le a_n)$., ובנוסף $\exists\lim_{n\to\infty}a_n=0$ ובנוסף קימים P<Q כך שלכל n<m $P\le\sum_{k=n}^{m}b_k\le Q$. אז $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ מתכנס.

4. מבחן אבל $\exists K$ כך ש $(n>K)\to[(a_n\downarrow)\vee(a_n\uparrow)]$, ובנוסף $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנסת. אז $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ מתכנס.