שעורי אינפי ב' התשע"ה
סכום משפטים והוכחות למבחן

שם המורה: גיורא דולה

טענה

נתונה פונקציה רציפה וגזירה על הישר הממשי f ואשר מקיימת כי $f'=0$. אז ישנו קבוע d כך ש $f\equiv d$.

טענה

נתונות שתי פונקציות גזירות על הישר f,g כך ש $f'=g'$. אז קים קבוע d כך ש $g\equiv f+d$.

טענה

נניח כי f כמקודם אינטגרבילית רימן. אז f חיבת להיות חסומה בקטע [a,b].

טענה

נתונות חלוקות $\Delta\subseteq\Gamma$ של הקטע [a,b] ופונקציה חסומה המוגדרת על [a,b]. אז מתקיימים אי השויונים $\overline{SD}(\Delta)\le\overline{SD}(\Gamma)$ ו $\underline{SD}(\Gamma)\le\underline{SD}(\Delta)$

טענה מחיקת מספר סופי של איברים

נתונה סדרה $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots$, ונתון מספר טבעי K, נגדיר סדרה חדשה על ידי מחיקת K האיברים הראשונים $b_1=a_{K+1},b_2=a_{K+1},\cdots,b_n=a_{K+n},\cdots,$, אז הטענות הבאות שקולות: א. הטור של הסדרה a_n מתכנס. ב. הטור של הסדרה b_n מתכנס.

טענה

נניח כי הטור $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ מתכנס, אז גם הסדרה a_k מתכנסת ל-0.

טענה התכנסות שקולה לחסימות

נתונה סדרה שהיא אי שלילית החל ממקום מסויים. אז הטענות הבאות שקולות.

א. הטור של הסדרה מתכנס (סדרת הסכומים החלקיים מתכנסת).
ב. הטור של הסדרה חסום (סדרת הסכומים החלקיים חסומה).

משפט (מבחן ההשואה לטורים חיוביים)

נתונות שתי סדרות ונתון K טבעי כך ש $(K<n) \to (0\le a_n \le b_n)$. אז:

א. אם הטור $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ מתכנס אז גם הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס.
ב. אם הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתבדר אז גם הטור $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ מתבדר.

טענה התכנסות שקולה לחסימות

נתונה פונקציה רציפה ואי שלילית f על הקרן $[K,\infty)$. אז הטענות הבאות שקולות:

א. האינטגרל $\int_K^{\infty} f(t)dt$ מתכנס.
ב. האינטגרל $\int_K^{\infty} f(t)dt$ חסום מלעיל.

מבחן האינטגרל

נתונה פונקציה f ונתון שיש K טבעי כך שבקטע $[K,\infty)$ הפונקציה יורדת במובן הרחב, וכן $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$. אז הטענות הבאות שקולות:

א. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f(n+K)$ מתכנס.
ב. האינטגרל $\int_K^{\infty} f(t)dt$ מתכנס.

וכמו כן שתי הטענות הבאות שקולות:

ג. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f(n+K)$ מתבדר.

ד. האינטגרל $\int_{K}^{\infty} f(t)dt$ מתבדר.

מבחן השואת הגבולות

נתונות סדרות חיוביות a_n, b_n, ונתון כי מתקיים $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$. אם $0<L<\infty$, התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ שקולה להתכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

מבחן השואת המנות

נתונים שני טורים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ חיוביים. נניח כי קים $0<K$ טבעי כך ש $(n>K) \to (\frac{a_n}{a_{n-1}} \le \frac{b_n}{b_{n-1}})$. אז א. התכנסות $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ גוררת התכנסות $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. ב. התבדרות $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ גוררת התבדרות $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

משפט המנות של ד'אלמברט, גרסת האיברים.

נתונה סדרה חיובית a_n נניח כי קים $0<K$ טבעי

א. כך ש $(n>K) \to (1 \le \frac{a_{n+1}}{a_n})$. אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

ב. וקים מספר $0<q<1$ כך ש $(n>K) \to (\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q)$. אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

משפט המנות של ד'אלמברט גרסת הגבול

נתונה סדרה חיובית a_n נניח כי קים $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$

א. אם $L<1$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

ב. אם $1<L$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר

משפט השורש של קושי, גרסת האיברים

נתונה סדרה חיובית a_n נניח כי קים $0<K$ טבעי

א. כך ש $(n>K) \rightarrow (1 \le \sqrt[n]{a_n})$. אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

ב. וקים מספר $0<q<1$ כך ש $(n>K) \rightarrow (\sqrt[n]{a_n} \le q)$. אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

משפט השורש של קושי, גרסת הגבול

נתונה סדרה חיובית a_n נניח כי קים $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$

א. אם $L<1$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

ב. אם $1<L$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר

מבחן ראבה גרסת האיברים.

נתונה סדרה חיובית a_n נניח כי קים $0<K$ טבעי

א. כך ש $(n>K) \rightarrow (n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) \le 1)$. אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

ב. וקים מספר $1<p$ כך ש $(n>K) \rightarrow (p \le n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1))$. אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

מבחן ראבה גרסת הגבול.

נתונה סדרה חיובית a_n נניח כי קים $\lim_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=L$

א. אם 1<L אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.
ב. אם L<1 אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

טורים כלליים

משפט לייבניץ

נתונה סדרה a_n ונתון כי יש 0<K כך שעבור K<n האיברים חיוביים, והם סדרה היורדת ל-0. אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ מתכנס. נסמן את גבולו ב-S. יהי נתון מספר טבעי m, כך ש K<2m. אז מתקיים כי $S_{2m+1} \le S \le S_{2m}$. כאשר נזכר כי $S_p = \sum_{n=1}^{p} (-1)^n a_n$.

משפט דיריכלה

נתון הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, וידוע כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ חסום וכי הסדרה a_n מונוטונית ושואפת ל-0. אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

משפט אבל

נתון הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, וידוע כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טור מתכנס וכי הסדרה a_n מונוטונית וחסומה. אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

טענה:

משפט אבל נובע ממשפט דיריכלה