השלמה במבנים

משפט: האלגוריתם של אוקלידס

נתונים שדה k ופולינומים $p(x),q(x)\in k[x]$. אז קיימים פולינומים $m(x),r(x)\in k[x]$, ($m(x)$ קרוי מנה, $r(x)$ קרוי שארית) כך שמתקיים השוויון $p(x)=m(x)q(x)+r(x)$, וכך ש-$\deg(r(x))<\deg(q(x))$

הוכחה באינדוקציה על $\deg(p(x))$.

שלב הבסיס : אם $\deg(p(x))<\deg(q(x))$ אז נבחר $m(x)=0,r(x)=p(x)$.

שלב האינדוקציה. נניח כי הוכחנו את הטענה לכל $p(x)$ כך ש-$\deg(p(x))<n$ ויהי נתון $p(x)$ כך ש-$\deg(p(x))=n$.

דוגמא מספרית לשלב הבא:

$$p(x)=3x^3+2x^2+x+1, q(x)=2x+3\in R[x],$$

$$\frac{3x^3}{2x}=1.5x^2, p(x)-1.5x^2q(x)=(3x^3+2x^2+x+1)$$

$$-1.5x^2(2x+3)=(3x^3+2x^2+x+1)-(3x^3+4.5x^2)=$$

$$-2.5x^2+x+1, \deg(p(x)-1.5x^2q(x))<\deg(p(x)).$$

,
וכעת נעבור למקרה הכללי: נסמן:

$$p(x)=a_nx^n+\cdots+a_0, q(x)=b_mx^m+\cdots+b_0\in k[x], m\le n$$

אז

$$\frac{a_nx^n}{b_mx^m}=\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}, p(x)-\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}q(x)=(a_nx^n+\cdots)$$

$$-\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}(b_mx^m+\cdots)=(a_nx^n+\cdots)-(a_nx^n+\cdots),$$

$$\deg(p(x)-\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}q(x))<\deg(p(x)).$$

ולכן קיימים, לפי הנחת האינדוקציה פולינומים n(x),r(x) כך ש- deg(r(x))<deg(q(x)) וכך ש-:

$$p(x)-\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}q(x)=n(x)q(x)+r(x)\rightarrow$$

$$p(x)=\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}q(x)+n(x)q(x)+r(x)=$$

$$[\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}+n(x)]q(x)+r(x)$$

סוף הוכחה.

משפט המשך: (לא הספקנו בשעור).

הפולינומים m(x),r(x) בעלי התכונות של המשפט הקודם-יחידים.

סקירת הוכחה. נניח כי גם n(x),s(x) מקיימים את המשפט: אז:

$$p(x)=q(x)m(x)+r(x)=q(x)n(x)+s(x)\rightarrow$$
$$q(x)[m(x)-n(x)]=s(x)-r(x)$$

אם הפולינום m(x)-n(x) איננו פולינום ה- 0, אז הדרגה של אגף שמאל היא לפחות כמו הדרגה של q(x) ואילו של אגף ימין קטנה ממש ממנה, סתירה. לכן, m(x)=n(x) לכן אגף שמאל הוא 0, לכן גם אגף ימין, לכן גם r(x)=s(x).