הרצאה 1.

פעולות בינאריות.

הגדרה 1. תהי A קבוצה כלשהי. פונקציה $f: A\times A\to A$ של שני משתנים נקראת *פעולה בינרית* מעל A.

דוגמאות: קבוצה $\mathbf{R}$ של מספרים ממשיים ופונקציה $f(a,b)=a+b$.
קבוצה $\mathbf{R}$ של מספרים ממשיים ופונקציה $f(a,b)=a-b$.

להלן אנו נכתוב $a*b$ במקום $f(a,b)$

הגדרה 2. תהי A קבוצה כלשהי עם פעולה בינרית $*$. איבר $e\in A$ נקרא *איבר-היחידה* כלפי $*$ אם לכל $a\in A$ הוא מקיים $a*e=e*a=a$.

דוגמא 1. 0 הוא אביר-יחידה כלפי פעולת החיבור המוגדרת מעל הקבוצה של מספרים שלמים (רציונאליים, ממשיים, מרוכבים).
1 הוא אביר-יחידה כלפי פעולת הכפל המוגדרת מעל הקבוצה של מספרים שלמים (רציונאליים, ממשיים, מרוכבים).
לא לכל פעולה בינארית קיים איבר-היחידה. למשל בקבוצה $\mathbf{R}$ לא קיים איבר-היחידה ביחס לחיסור.

טענה 1. תהי A קבוצה כלשהי עם פעולה בינרית $*$. אם ב-A קיים איבר-היחידה כלפי $*$, אז הוא יחיד.
הוכחה. נניח שבקבוצה A ישנם שני אברי-יחידה e_1 ו e_2 (לא בהכרח שונים). אז $e_1=e_1*e_2=e_2$. **מ.ש.ל.**

הגדרה 3. תהי A קבוצה כלשהי עם פעולה בינארית $*$. פעולה $*$ נקראת פעולה *אסוציאטיבית* אם לכל שלושה איברים $a\in A, b\in A, c\in A$ מתקיים:
$a*(b*c)=(a*b)*c$

הגדרה 4. תהי A קבוצה כלשהי עם פעולה בינארית $*$. פעולה $*$ נקראת פעולה *קומוטטיבית* אם לכל ששני איברים $a\in A, b\in A$ מתקיים: $b*a=a*b$

דוגמא. חיבור הוא פעולה אסוציאטיבית וחיסור איננו אסוציאטיבי: למשל $(1-2)-3\neq 1-(2-3)$.

אם $a_1\in A, a_2\in A, a_3\in A, a_4\in A$ ארבעה איברים כלשהם, אז מכפלתם $a_1*a_2*a_3*a_4$ אפשר לחשב ב –5 אופנים (ללא שינוי סדר הגורמים):

$$
\begin{aligned}
b_1 &:= (a_1*(a_2*a_3))*a_4,\\
b_2 &:= ((a_1*a_2)*a_3)*a_4,\\
b_3 &:= a_1*((a_2*a_3)*a_4),\\
b_4 &:= a_1*(a_2*(a_3*a_4)),\\
b_5 &:= (a_1*a_2)*(a_3*a_4)
\end{aligned}
$$

מהחוק האסוציאטיבי נובע ש- $b_1 = b_2, b_3 = b_4$ וגם:

$$b_5 = (a_1 * a_2) * (a_3 * a_4) = a_1 * (a_2 * (a_3 * a_4)) = b_4,$$
$$b_5 = (a_1 * a_2) * (a_3 * a_4) = ((a_1 * a_2) * a_3) * a_4 = b_2$$

כלומר ערך הביטוי $a_1 * a_2 * a_3 * a_4$ איננו תלוי במיקום של סוגריים.

טענה 2 (החוק האסוציאטיבי מורחב).
תהי A קבוצה כלשהי עם פעולה בינרית ואסוציאטיבית $*$. אז לכל n איברים $a_1 \in A, ..., a_n \in A$ ערך הביטוי $(a_1 * (a_2 * .)..)..(..\ . * a_{n-1} * a_n)$ לא תלוי במיקום של סוגריים (אבל כן תלוי בסדר הגורמים).

<u>הערה 1.</u> מהטענה נובע שאפשר לכתוב את הביטוי $(a_1 * (a_2 * .)..)..(..\ . * a_{n-1} * a_n)$ בלי סוגריים. $a_1 * a_2 * ... * a_{n-1} * a_n$.

הגדרה 5. קבוצה A יחד עם פעולה בינרית ואסוציאטיבית $*$ נקראת *<u>חבורה למחצה</u>* .

הגדרה 6. חבורה למחצה קבוצה $(A,*)$ נקראת *<u>מונויד</u>* אם קיים בה איבר-היחידה ביחס לפעולה $*$.

דוגמאות.
א. $(\mathbf{N},+)$ היא חבורה למחצה אבל לא מונויד. $(\mathbf{Z},+)$ היא מונויד עם איבר-היחידה 0.

ב. תהי Σ קבוצה סופית כלשהי. נגדיר $\Sigma^\bullet$ כקבוצה של כל המילים שניתן להרכיב מאלף-בת Σ. נגדיר פעולת <u>שירשור</u> בין שתי מילים $\mathbf{a} = a_1 a_2 ... a_m, \mathbf{b} = b_1 b_2 ... b_n$ השייכים ל- $\Sigma^\bullet$ באופן הבא:

$$\mathbf{a} * \mathbf{b} = a_1 a_2 ... a_m b_1 b_2 ... b_n$$

למשל $(xxyzzz) * (xxxz) = xxyzzzxxxz$). פעולת שירשור היא פעולה אסוציאטיבית ואיבר היחידה שלה שווה ל<u>מילה ריקה</u> המסומנת כ- Λ.

הגדרה 6. תהי A קבוצה כלשהי עם פעולה בינארית $*$ ואיבר היחידה e. איבר $a \in A$ נקרא *<u>הפוך</u>* לאיבר $b \in A$ אם ורק אם $b * a = a * b = e$. איבר שיש לו הפוך נקרא *<u>הפיך.</u>*

איבר היחידה e תמיד הפיך מפני שהוא הפוך לעצמו.

טענה 3. אם $(A,*,e)$ מונויד, אז לכל איבר יש הפוך אחד לכל היותר.
<u>הוכחה.</u>
נניח ש $b_1, b_2 \in A$ שני הפוכים לאותו איבר $a \in A$. אז

$$b_1 * a = a * b_1 = e, \quad b_2 * a = a * b_2 = e.$$

מכאן נובע $b_1 = b_1 * e = b_1 * (a * b_2) = (b_1 * a) * b_2 = e * b_2 = b_2$. **מ.ש.ל.**

מהטענה נובע שלכל איבר הפיך $a \in A$ של המונויד $(A,*,e)$ יש הפוך אחד בלבד.

נסמן אותו כ- a^{-1}. כלומר $a^{-1}*a=a*a^{-1}=e$. מהשוויון הזה נובע שאם $a\in A$ הפיך אז גם a^{-1} הפיך והפוכו שווה ל- a. כלומר $(a^{-1})^{-1}=a$.

טענה 4. אם $(A,*,e)$ מונויד ו $a,b\in A$ הפיכים, אז $a*b$ הפיך ו $(a*b)^{-1}=b^{-1}*a^{-1}$.

<u>הוכחה.</u>

a,b הפיכים, לכן קיימים $b^{-1},a^{-1}\in A$ ו $b^{-1}*a^{-1}\in A$. מכאן נובע ש:

$$(a*b)*(b^{-1}*a^{-1})=a*(b*b^{-1})*a^{-1}=a*e*a^{-1}=a*a^{-1}=e$$

$$(b^{-1}*a^{-1})*(a*b)=b^{-1}*(a*a^{-1})*b=b^{-1}*e*b=b^{-1}*b=e$$

לכן $b^{-1}*a^{-1}$ הפוך ל-$a*b$, כלומר $(a*b)^{-1}=b^{-1}*a^{-1}$. **מ.ש.ל.**

הגדרה 7. מונויד שבו כל איבר הפיך נקרא *<u>חבורה.</u>* כלומר קבוצה A, <u>לא ריקה</u>, שעליה מוגדרת פעולה בינארית $*$ נקראת חבורה אם היא מקיימת את האקסיומות הבאות:

G1. $\forall a\in A\forall b\in A\ \ a*b\in A$. (אקסיומת סגירות).

G2. $\forall a\in A\forall b\in A\forall c\in A\ \ (a*b)*c=a*(b*c)$. (חוק אסוציאטיבי).

G3. $\exists e\in A\forall a\in A\ \ \ a*e=e*a=a$. (אקסיומת קיום איבר היחידה).

G4. $\forall a\in A\ \exists b\in A\ \ a*b=e$. (אקסיומת קיום איבר הפוך).

חבורה $(A,*)$ נקראת *<u>קומוטטיבית</u>* אם $*$ פעולה קומוטטיבית.

חבורה שיש לה איבר-היחידה בלבד נקראת *<u>חבורה טריביאלית.</u>*

דוגמאות

א. הקבוצה $\mathbf{Z}$ היא חבורה ביחס לחיבור. איבר-היחידה הוא 0 והפכי למספר $a\in\mathbf{Z}$ שווה ל- $-a$.

ב. תהי C_n קבוצה של כל המספרים המרוכבים מהצורה $\varepsilon_k=\mathrm{cis}\left(\frac{2\pi}{n}k\right), k=0,...,n-1$. הקבוצה C_n סגורה כלפי כפל מפני ש:

$$\varepsilon_k\varepsilon_l=\mathrm{cis}\left(\tfrac{2\pi}{n}l\right)\mathrm{cis}\left(\tfrac{2\pi}{n}k\right)=\mathrm{cis}\left(\tfrac{2\pi}{n}(k+l)\right)=\begin{cases}\varepsilon_{k+l}, k+l<n\\ \varepsilon_{k+l-n}, k+l\geq n\end{cases}\in C_n$$

. כפל מספרים מרוכבים היא פעולה אסוציאטיבית. איבר-יחידה של הכפל שווה ל-1 ושייך ל- C_n ($1=\varepsilon_0$). לכל $\varepsilon_k\in C_n$ האיבר ε_{n-k} יהיה הפוך. לכן C_n היא חבורה ביחס לכפל מספרים מרוכבים. היא נקראת חבורת שורשי-יחידה ממעלה n מפני ש- $C_n=\{z\in\mathbf{C}\mid z^n=1\}$. למשל

$$C_1=\{1\}, C_2=\{-1,1\}, C_3=\left\{1,\tfrac{-1+\sqrt{3}i}{2},\tfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right\}, C_4=\{1,-1,i,-i\}.$$

טענה 5. אם $(A,*,e)$ מונויד, אז הקבוצה A^* של כל האיברים ההפיכים שלו היא חבורה ביחס לפעולה $*$.

<u>הוכחה.</u>

הקבוצה A^* איננה רקיה מפני ש- $e\in A^*$. נוכיח ש A^* מקיימת את אקסיומות החבורה ביחס ל- $*$.

<u>סגירות</u> נובעת מטענה 4.
<u>חוק אסוציאטיבי</u> לפעולה $*$ מתקיים ב-A^* מפני הוא מתקיים ב-A ו A^* חלקית ל-A.
<u>איבר היחידה</u> קיים ב-A^*, מפני ש-$e \in A^*$.
<u>קיום איבר הפוך.</u> אם $a \in A^*$ אז קיים $a^{-1} \in A$. מהשוויון $a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$
נובע ש-a הפוך ל-a^{-1}. לכן a^{-1} הפיך. **מ.ש.ל.**

דוגמא 1. נביט בקבוצת המטריצות $M_n(F)$ הריבועיות מסדר n שרכיבהן שייכם לשדה F. כפל מטריצות הוא פעולה אסוציאטיבית ומטריצת-יחידה I_n היא איבר-היחידה ביחס לכפל. לכן הקבוצה $M_n(F)$ היא מונויד ביחס לכפל המטריצות. מטענה 5 נובע שקבוצה של כל המטריצות ההפיכות של $M_n(F)$ היא חבורה ביחס לכפל מטריצות. היא מסומנת כ-$GL_n(F)$, כלומר
$GL_n(F) = \{A \in M_n(F) \mid \det(A) \neq 0\}$.

דוגמא 2. תהי X קבוצה כלשהי. נסמן כ-$Fun(X)$ קבוצת הפונקציות מ-X ל-X. הרכבה $f \circ g$ של שתי פונקציות $f, g \in Fun(X)$ היא פעולה אסוציאטיבית וקבוצה $Fun(X)$ סגורה ביחס להרכבה. הפונקציה הזהותית i_X היא איבר-היחידה ביחס ל-$\circ$. לכן $(Fun(X), \circ)$ מונויד. מטענה 5 נובע שקבוצה של כל הפונקציות ההפיכות מ-X ל-X היא חבורה ביחס לפעולה $\circ$. היא נקראת *<u>חבורה סימטרית</u>* של קבוצה X ומסומנת כ- $S(X)$. אם $X = \{1,2,\ldots,n\}$ אז $S(X)$ מסומנת כ-S_n. למשל
$S_2 = \left\{\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\right\}, S_3 = \left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\right\}$.

שאלות

1. מצא את אברי-היחידה (אם קיימים) בפעולות הבאות:
א. $(\mathbf{R}, -), (\mathbf{R}, +), (\mathbf{R}, :), (\mathbf{R}, \cdot)$.
ב. $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbf{Z} \right\}$ ו פעולה $*$ היא כפל מטריצות.

2. הוכח שלכל n טבעי מתקיים $(a_1 * a_2 * \ldots * a_n)^{-1} = a_n^{-1} * a_{n-1}^{-1} * \ldots * a_1^{-1}$.

3. הוכח שאם פעולה $*$ אסוציאטיבית, אז הפעולה $\circ$ המוגדרת ע"י השוויון $a \circ b := b * a$ גם אסוציאטיבית.

4. פעולה בינארית $*$ מוגדרת על הקבוצה $A = \{a, b, c\}$ באמצעות טבלה הבאה:

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	a
c	c	a	a

א. מצא את איבר היחידה ביחס ל-$*$.
ב. לכל איבר של A מצא את כל ההפוכיו.
ג. הרא שפעולה $*$ אינה אסוציאטיבית.