הרצאה 4
<u>הומומורפיזמים ואיזומורפיזמים</u>

<u>**הגדרה 1.**</u> תהיינה G,H שתי חבורות כלשהן. פונקציה שלמה $f:G\to H$ נקראת <u>הומומורפיזם</u> אם לכל $g_1,g_2\in G$ מתקיים $f(g_1 *_G g_2)=f(g_1) *_H f(g_2)$ (כאן $*_G$ ו $*_H$ הן פעולות בינאריות ב- G ו H בהתאם). הומומורפיזם $f:G\to H$ נקרא <u>איזומורפיזם</u> אם f פונקציה הפיכה. שתי חבורות G,H נקראות <u>איזומורפיות</u> (סימון, $G\cong H$) אם קיים איזומורפיזם ביניהן.

<u>*דוגמה 1.*</u> ניקח $G=\mathbf{Z}_3, H=\mathbf{Z}_6$ ונביט בפונקציה $f:\mathbf{Z}_3\to\mathbf{Z}_6$ המוגדרת באופן הבא: $f([0]_3)=[0]_6,\ f([1]_3)=[2]_6,\ f([2]_3)=[4]_6$.

<u>*דוגמה 2.*</u> תהיינה $G=\mathbf{R}, *_G=+$ ו $H=\mathbf{R}^{>0}, *_H=\cdot$. הפונקציה $f:G\to H,\ f(x)=e^x$ היא הומומורפיזם, מפני שהיא מקיימת $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$. הפונקציה הזאת היא גם איזומורפיזם מפני שהיא הפיכה.

<u>**טענה 1.**</u> $\cong$ הוא יחס שקילות בין חבורות.
<u>**הוכחה.**</u>
<u>רפלקסיביות.</u>
לכל חבורה G הפונקציה $id_G:G\to G$ היא איזומורפיזם מ- G ל- G. לכן $G\cong G$ לכל חבורה G.

<u>סימטריות.</u>
נניח ש- $G\cong H$. אז קיים איזומורפיזם $f:G\to H$. f פונקציה הפיכה, לכן קיימת $f^{-1}:H\to G$. נוכיח ש- f^{-1} הומומורפיזם. ניקח $h_1\in H, h_2\in H$ שני איברים כלשהם. f פונקציה הפיכה, לכן קיימים $g_1\in G, g_2\in G$ כך ש- $f(g_1)=h_1,\ f(g_2)=h_2$. לכן $f(g_1*g_2)=f(g_1)*f(g_2)=h_1*h_2$. נפעיל את f^{-1} משני הצדדים של השוויון ונקבל $f^{-1}(h_1*h_2)=g_1*g_2=f^{-1}(h_1)*f^{-1}(h_2)$. הוכחנו ש- f^{-1} הומומורפיזם ולכן $H\cong G$.

<u>טרנזיטיביות.</u>
נניח ש- $G\cong H$ וגם $H\cong F$. אז קיימים איזומורפיזמים $a:G\to H, b:H\to F$. הפונקציה $a\circ b:G\to F$ הפיכה כהרכבה של שתי פונקציות הפיכות. נוכיח ש- $a\circ b$ הומומורפיזם:

$$(a\circ b)(g_1*g_2)=b(a(g_1*g_2))=b(a(g_1)*a(g_2))=$$
$$b(a(g_1))*b(a(g_2))=(a\circ b)(g_1)*(a\circ b)(g_2)$$

מ.ש.ל.

<u>**טענה 2.**</u> יהי $f:G\to H$ הומומורפיזם חבורות. אז
א. $f(e_G)=e_H$.
ב. $f(g^{-1})=(f(g))^{-1} \quad \forall g\in G$.
ג. $f(g^n)=(f(g))^n \quad \forall n\in\mathbf{Z} \quad \forall g\in G$.

<u>הוכחה</u>.

א. $e_G * e_G = e_G \Rightarrow f(e_G) * f(e_G) = f(e_G) \Rightarrow f(e_G) = e_H$.

ב. $g * g^{-1} = e_G \Rightarrow f(g) * f(g^{-1}) = f(e_G) = e_H \Rightarrow f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$.

ג. נוכיח קודם שהטענה מתקיימת ל-$n \in \mathbf{N}$. את ההוכחה נעשה באינדוקציה לפי n.

בדיקה: $n=1$ אין מה להוכיח.

צעד האינדוקציה: נניח ש-$f(g^n) = (f(g))^n$. אז

$$f(g^{n+1}) = f(g^n * g) = f(g^n) * f(g) = (f(g))^n * f(g) = (f(g))^{n+1}.$$

נוכיח עכשיו שהשוויון $f(g^n) = (f(g))^n$ מתקיים גם כאשר $n \le 0$.

אם $n=0$ אז השוויון נובע מחלק א' של הטענה. אם $n<0$, אז $g^n = (g^{-1})^{|n|}$.

מפני ש-$|n|$ מספר טבעי ועבור מספרים טבעיים הטענה הוכחה, אז

$f(g^n) = f((g^{-1})^{|n|}) = f(g^{-1})^{|n|}$. מחלק ב' נובע ש-$f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$. לכן

$f(g^{-1})^{|n|} = (f(g)^{-1})^{|n|} = f(g)^n$.

מ.ש.ל.

<u>**הערה.**</u> הומומורפיזם $f: G \to H$ נקרא <u>טריביאלי</u> אם $\mathrm{Im}(f) = \{e_H\}$.

<u>**טענה 3.**</u> יהי $f: G \to H$ הומומורפיזם חבורות. אז

א. לכל תת-חבורה $A \le G$ מתקיים $f(A) \le H$.

ב. לכל תת-חבורה $B \le H$ מתקיים $f^{-1}(B) \le G$.

<u>הוכחה</u>.

א. הקבוצה $f(A)$ לא ריקה מפני ש-$e_H = f(e_G) \in f(A)$. ניקח $x, y \in f(A)$ כלשהם ונוכיח ש-$xy^{-1} \in f(A)$. מהשייכות $x, y \in f(A)$ נובע שקיימים $a_1 \in A, a_2 \in A$ כך ש-$f(a_1) = x, f(a_2) = y$. אז

$$x * y^{-1} = f(a_1) * (f(a_2))^{-1} = f(a_1) * f(a_2^{-1}) = f(a_1 * a_2^{-1}) \in f(A).$$

ב. הקבוצה $f^{-1}(B)$ לא ריקה מפני ש-$f(e_G) = e_H \in B \Rightarrow e_G \in f^{-1}(B)$. ניקח שני איברים $x \in f^{-1}(B), y \in f^{-1}(B)$. אז $f(x) \in B, f(y) \in B$ ולכן

$$f(x * y^{-1}) = f(x) * f(y^{-1}) = f(x) * f(y)^{-1} \in B.$$

מ.ש.ל.

מהטענה הזאת נובע שאם $f: G \to H$ הומומורפיזם, אז $f(G) \le H$ וגם $f^{-1}(e_H) \le G$. תת-החבורה $f(G)$ נקראת <u>התמונה</u> של f ומסומנת כ-$\mathrm{Im}(f)$. תת-החבורה $f^{-1}(e_H)$ נקראת <u>הגרעין</u> של f ומסומנת כ-$\mathrm{Ker}(f)$.

<u>**טענה 4**</u>. יהי $f: G \to H$ הומומורפיזם חבורות כלשהו. אז

א. $\forall g_1 \in G \ \forall g_2 \in G \ \ f(g_1) = f(g_2) \Leftrightarrow g_1 * (g_2)^{-1} \in \mathrm{Ker}(f)$.

ב. f חד-חד-ערכית אם ורק אם $\mathrm{Ker}(f) = \{e_G\}$.

<u>הוכחה</u>.

א.

$$f(g_1) = f(g_2) \Leftrightarrow f(g_1) * f(g_2)^{-1} = e_H \Leftrightarrow f(g_1 * g_2^{-1}) = e_H \Leftrightarrow g_1 * g_2^{-1} \in \mathrm{Ker}(f).$$

ב. נניח ש-f חד-חד-ערכית. לכל $g \in \mathrm{Ker}(f)$ מתקיים $f(g) = e_H = f(e_G)$. לכן $g = e_G$ וזה גורר $\mathrm{Ker}(f) = \{e_G\}$.

נניח, להפך, ש- $\mathrm{Ker}(f)=\{e_G\}$. אז מחלק א' נובע ש:
$$f(g_1)=f(g_2)\Leftrightarrow g_1*(g_2)^{-1}\in \mathrm{Ker}(f)=\{e_G\}\Leftrightarrow g_1=g_2 .$$
מ.ש.ל.

כמסקנה מיידית מקבלים את הטענה הבאה:

<u>**טענה 5.**</u> הומומורפיזם $f:G\to H$ יהיה איזומורפיזם אם ורק אם $\mathrm{Im}(f)=H, \mathrm{Ker}(f)=\{e\}$.

<u>**הגדרה 2.**</u> יהיו R,S שני חוגים כלשהם. פונקציה שלמה $f:R\to S$ נקראת <u>הומומורפיזם של חוגים</u> אם לכל $r_1,r_2\in R$ מתקיים

א. $f(r_1+_R r_2)=f(r_1)+_S f(g_2)$.

ב. $f(r_1\cdot_R r_2)=f(r_1)\cdot_S f(g_2)$.

ג. $f(1_R)=1_S$.

(כאן אינדקסים $_R$ ו $_S$ מסמנים פעולות ב- R ו S בהתאם).
הומומורפיזם $f:R\to S$ נקרא <u>איזומורפיזם</u> אם f פונקציה הפיכה. שני חוגים R,S נקראים <u>איזומורפיים </u>(סימון, $R\cong S$) אם קיים איזומורפיזם ביניהם.
הקבוצה $f(R)$ נקראת <u>התמונה</u> של f ומסומנת כ- $\mathrm{Im}(f)$.
הקבוצה $\mathrm{Ker}(f):=\{r\in R\mid f(r)=0\}$ נקראת <u>הגרעין</u> של f.

<u>הערה</u>. שני שדות נקראים <u>איזומורפיים</u> אם הם איזומורפיים כחוגים.

כמו בטענה 1 אפשר להוכיח שהיחס $\cong$ הוא יחס שקילות.

<u>*דוגמא 3*</u>. פונקציה $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}_n$ המוגדרת ע"י הנוסחה $f(r)=[r]_n$ היא הומומורפיזם חוגים מפני שהיא מקיימת תנאים א'-ג'.

<u>*דוגמא 4*</u>. נביט בתת-החוג $S=\left\{\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\middle|\ a,b\in\mathbf{R}\right\}\subseteq M_2(\mathbf{R})$. הפונקציה $f:S\to\mathbf{C}$ המוגדרת ע"י הנוסחה $f\left(\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\right)=a+bi$ היא איזומורפיזם של חוגים (בדוק את זה).

****

<u>**בעיה 1**</u>. הוכח שאם $f:G\to H$ איזומורפיזם של חבורות, אז

א. $|G|=|H|$.

ב. H אבלית אם ורק אם G אבלית.

<u>**בעיה 2.**</u> הוכח שהחבורות $(\mathbf{Z}_4,+),(\mathbf{Z}_5^*,\cdot)$ הן חבורות איזומורפיות ומצא איזומורפיזם ביניהן.

<u>**בעיה 3.**</u> הוכח שאם $f:R\to S$ הומומורפיזם של חוגים, אז $\mathrm{Im}(f)$ תת-חוג של R.

<u>**בעיה 4**</u>. הוכח שאם $f:R\to S$ הומומורפיזם של חוגים, אז $\mathrm{Ker}(f)$ תת-חבורה ביחס לחיבור. הוכח שב- $\mathrm{Ker}(f)$ אין איברים הפיכים.

<u>בעיה 5</u>. הוכח שאם R שדה, אז $\mathrm{Ker}(f)=\{0\}$ לכל הומומורפיזם של חוגים $f:R\to S$