

תודה לאריאל שמרלינג שסיכם את ההרצאות

רק הטענות המסומנות ב-***** יכולות להופיע בהוכחות המשפטים

הרצאה ראשונה יום ה ד אב התשסז-2007-19-7

טענה מספר 1:

נתונה חבורה למחצה $(A, *)$. נתונים איברים a_1, \dots, a_n ב- A
 נתון הביטוי $a_1 * a_2 * \dots * a_n$
 עם סדר סוגרים כלשהוא. אז הביטוי של הפעולה הבינארית על a_1, \dots, a_n
 זהה לביטוי $(a_1 * a_2) * \dots * a_n$

טענה: נתון מונואיד $(A, *)$ ונתונים בו שני איברים יחידה e_1, e_2 אז: $e_1 = e_2$

סוף הרצאה ראשונה

הרצאה שניה יום א ז אב התשסז-2007-22-7

טענה (2): יחידות הנגדי

נתון מונואיד $(A, *)$ בעל איבר יחידה e ונתון $b \in A$, ונניח כי $c, d \in A$ מקיימים כי:
 $c * b = b * c = e$
 $d * b = b * d = e$
 אז $d = c$

טענה (3): ההפכי של ההופכי

נתונים מונואיד $(A, *, e)$ ונתון איבר הפיך $b \in A$. אז: b^{-1} הוא הפיך ו $(b^{-1})^{-1} = b$

טענה 4: מכפלת הפיכים היא הפיכה

נתונים מונואיד $(A, *, e)$ ונתונים איברים הפיכים, $b, c \in A$.

אז גם $b * c$ הוא גם איבר הפיך ו-

$$(b * c)^{-1} = c^{-1} * b^{-1}$$

*****טענה (5): חבורת האיברים ההפיכים בתוך מונואיד

ונתונים $(A, *, e)$ מונואיד ונביט על תת הקבוצה G של A אשר כוללת את כל האיברים ההפיכים ב A אז $(G, *, e)$ היא חבורה.

סוף הרצאה שניה

הרצאה שלישית יום ה יא אב התשסז-2007-7-26

טענה 6 – אספ המטריצות הריבועיות הן חוג

נתון חוג R נביט על כל המטריצות הריבועיות $n \times n$ מעל R ונסמן אותן $M_n(R)$ אז $M_n(R)$ חוג.

*****טענה 7 – מונואיד הפונקציות מ X ל X .

מהווה מונואיד. $(F(x), \circ)$

סוף הרצאה שלישית

הרצאה רביעית יום א יד אב התשסז-2007-7-29

סוף הרצאה רביעית

הרצאה חמישית יום א כא אב התשסז-2007-8-5

טענה 8 : יחס השקילות מתחלף עם חיבור וכפל

אם $a \sim b \pmod n$ וגם $c \sim d \pmod n$

אז $a+c \sim b+d$ וגם $ac \sim bd$

טענה 9 (כשרות ההגדרה)

פעולות החיבור והכפל ב Z_n מוגדרות היטב.

*****טענה 10 – Z_n הוא חוג

Z_n עם הפעולות חיבור וכפל הוא חוג, כלומר מקיים את כל אקסיומות השדה למעט M4.

*****טענה 11 - איברים הפיכים ב Z_n

נתונים מספר טבעי n ומספר טבעי a , $0 < a < n$,

אז הטענות הבאות שקולות:

1. $[a]_n$ הפיך בכפל של Z_n

2. $\gcd(a,n)=1$ (זרים a, n)

טענה 12 - Z_n הוא שדה אם n הוא ראשוני

טענה 13 – אם n פריק אז Z_n אינו שדה

סוף הרצאה חמישית

הרצאה שישית יום א כח אב התשסז-2007-8-12

******טענה 14:** (תנאי להיות תת חבורה)
נתונה חבורה $(G, *, e)$ ונתונה קבוצה $H \neq \emptyset, H \subseteq G$
אז התנאים הבאים שקולים:
1. H היא חבורה חלקית של G

2. לכל $x, y \in H$ מתקיים $x(y)^{-1} \in H$

סוף הרצאה שישית

הרצאה שביעית יום ה אלול התשסז-2007-8-16

טענה 15 – חיתוך של ח"ח
נתונה חבורה $(G, *, e)$ ונתונות ח"ח H ו K של G אז $K \cap H$ היא ח"ח.

טענה 16 – ח"ח של ח"ח היא ח"ח
נתונה חבורה G ונתונה H ח"ח של G ונתונה K ח"ח של H אז K היא ח"ח של G

טענה 17 – חיתוך של מחלקות

נתונים חבורה G וח"ח H של G ואיברים $a, b \in G$ ונניח כי $(a * H) \cap (b * H) \neq \emptyset$
אז קיים שיוון בין קבוצות $(a * H) = (b * H)$

סוף הרצאה שביעית

הרצאה שמינית יום א ה אלול התשסז-2007-8-19

טענה*****

קיימת פונקציה הח"ע ועל $H \times [G:H] \rightarrow G$

מסקנה*****

(משפט Lagrange) $|H|x|[G:H]=|G|$

מסקנה

לכן עבור G סופית מספר המחלקות השמאליות של H ב- G שווה למספר המחלקות הימניות של H ב- G .

טענה

נתונים חבורה G ואיבר $x \in G$ בעל $|x|=O(x)$ סופי. ונניח כי נתון מספר טבעי כך ש $x^n = e$ אז $O(x)$ מחלק את n .

טענה

נתונים חבורה G ואיבר $x \in G$ בעל סדר סופי. נביט על x^i, x^j כך ש: $1 \leq i, j < O(x)$ ונניח כי $x^i = x^j$ אז $i=j$.
ניסוח גוסף: האיברים: $e, x, x^2, x^3, \dots, x^{O(x)-1}$ שונים זה מזה.

טענה

נניח G חבורה ו- $x \in G$ איבר בעל סדר סופי $O(x)$. אז $\langle x \rangle$ חבורה חלקית.

סוף הרצאה שמינית

הרצאה תשיעית יום ה ט אלול התשסז-2007-8-23

טענה הפוכה:

נתונה חבורה G , נתון $a \in G$ בעל סדר סופי $o(a)$ ונתון n כך ש $O(a)$ מחלק את n . אז: $a^n = e$.

טענת סיכום:

נתונים חבורה G , ואיבר $a \in G$ בעל סדר סופי $O(a)$. נתון מספר טבעי $0 < n$ אז:
הטענות הבאות שקולות:

1. $a^n = e$
2. $O(a)$ מחלק את n .

טענה

נתונים חבורה סופית G ואיבר $a \in G$ בעל סדר סופי. אז $a^{|G|} = e$

מסקנה

נתונה חבורה סופית ונתון $a \in G$, אז $O(a)$ מחלק את $|G|$.

Euler – טענה *****

נתונים מספרים טבעיים n ו k כך ש $\gcd(n,k)=1$ אז $k^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ כאשר $\varphi(n)$ היא פונקציית Euler.

Fermat המשפט (הקטן) של פרמה *****

נתונים מספר ראשוני p ומספר טבעי $1 \leq k \leq p$ אז: $k^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

סוף הרצאה תשיעית

הרצאה עשירית יום א יב אלול התשסז-2007-26-8

טענה: תנאי א' גורר תנאים ב' וג'
בתוך הומומורפיזם

טענה: נתון הומומורפיזם $f:G \rightarrow H$ ונתון $x \in G$ כך ש-
 $O(f(x)) \leq O(x)$ וביחוד $O(f(x)) < \infty$ אז $O(x) < \infty$

טענה: איזומורפיזם שומר סדר

נתון איזומורפיזם $f:G \rightarrow H$, ונתון $x \in G$ כך ש- $O(x) < \infty$ אז $O(x) = O(f(x))$.

טענה: הופכי של איזומורפיזם הוא איזומורפיזם

נתונה $f:G \rightarrow H$ שהיא איזומורפיזם של חבורות ונביט על f^{-1} העתקה הפוכה במובן הדיסקרטי, אז f^{-1} הוא הומומורפיזם של חבורות ולכן איזומורפיזם של חבורות.

טענה: יחס האיזומורפיזם של חבורות הוא יחס שקילות

סוף הרצאה עשירית

הרצאה אחד עשר יום א יט אלול התשסז-2007-9-2

טענה: נתונות חבורות G ו H ו $f: G \rightarrow H$ הומומורפיזם, ונניח כי $K < G$ (ח"ח), אז: $f(K)$ ח"ח של H .

מסקנה (טענה)

נביט על $K=G$ היא ח"ח של G ולכן $f(G)$ ח"ח של H אז:
 $H=f(G) \Leftrightarrow F$

טענה: נתון הומומורפיזם $f: G \rightarrow H$ ונתונה ח"ח K של H נביט על:
 $f^{-1}(K) = \{x \in G, f(x) \in K\}$. אז זוהי ח"ח של G .
 המקורות: תמונות הפוכות.

טענה

נתון הומומורפיזם $f: G \rightarrow H$ אז: f ח"ח"ע $\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{e\}$

*****מסקנה:

נתון הומומורפיזם $f: G \rightarrow H$ התנאים הבאים שקולים:

1. F היא איזומורפיזם

2. $\text{Ker}(f) = \{e\}$

$\text{Im}(f) = H$

סוף הרצאה אחד עשר

הרצאה שנים עשר יום א 9-9-2007, כ' אלול התשס"ז

טענה אם $x \in H < G$ אבר בח"ח, אז $\langle x \rangle < H < G$ כלומר אז H מכילה את החבורה הנוצרת על ידי x .

מסקנה: $\langle x \rangle$ היא הח"ח הקטנה ביותר בין הח"ח של G אשר מכילות את x .

*****טענה: אם $\text{ord}(x) = k < \infty$, אז $\langle x \rangle$ איזומורפי ל \mathbb{Z}_k עם פעולת החיבור מודולו k .

*****טענה: אם $\text{ord}(x) = \infty$, אז $\langle x \rangle$ איזומורפי ל \mathbb{Z} עם פעולת החיבור.

מסקנה: אם G איננה אבלית אז היא אינה ציקלית.

מבנים אלגבריים – הרצאה 1

סוף הרצאה שנים עשר

הרצאה שלש עשר יום ג 11-9-2007, ל'ח אלול התשס"ז

*****טענה כל חוג R ניתן לשכון בחוג הפולינומים מעל R.

משפט אוקלידס אודות החלוק של פולינום בפולינום.