המכללה האקדמית נתניה
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

NETANYA ACADEMIC COLLEGE
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

מבחן סוף במבנים אלגבריים למדעי המחשב-סמסטר קיץ כתת הנדסאים תשע"ג.

מועד א יום ב,כו תשרי התשע"ד 30-9-2013

- מורה: גיורא דולה, מתרגל: רענן שכטר.
- משך המבחן הוא שלש שעות.
- אפשר להשתמש רק במחשבון ובדפי העזר המצורפים.
- יש לכתוב במחברת תשובה מלאה על כל אחת מהשאלות.
- במבחן יש שני חלקים. בחלק א יש 6 שאלות ומתוכן יש לבחור 4. משקל כל שאלה בחלק א 15 נקודות. בחלק ב חמש שאלות מתוכן יש לבחור 4 ומשקל כל שאלה 10 נקודות. ס"הכ $4*15+4*10=100$.

בהצלחה.

Fax: (972-9) 8607711 :פקס Tel: (972-9) 8607777 :טל

חלק א

שאלה 1

הוכח את המשפט כי אם S שדה, ונתונים $p(x),q(x)\in S[x]$, אז קימים פולינומים $m(x),r(x)\in S[x]$ כך שמתקיים $p(x)=q(x)m(x)+r(x),\deg(r(x))<\deg(q(x)).$, וכך ש- $m(x),r(x)\in S[x]$ יחידים.

שאלה 2

יהי $f:G\to H$ הומומורפיזם של חבורות. הוכח כי:

א. תהי K חבורה חלקית של G. אז התמונה $f(K)$ היא חבורה חלקית של H.
ב. תהי L חבורה חלקית של H. אז התמונה ההפוכה $f^{-1}(L)$ היא חבורה חלקית של G.

שאלה 3

תהי H תת-חבורה כלשהי של חבורה G. הוכח כי:

א.* $\forall g \quad g\in g*H$
ב.* $\forall g,k\in G, k\in g*H\to k*H\subseteq g*H$.
ג.* $\forall g,k\in G, k\in g*H\to k*H=g*H$.
ד.* $\forall g,k\in G,\ [(g*H\cap k*H\neq\varnothing)\to(g*H=k*H)]$.
ה.* $a_g:H\to g*H \quad \forall g$ היא פונקציה חח״ע ועל.
ו.* $G=\bigcup_{g\in G} g*H$.

שאלה 4

נתון רבוע ונסמן את קדקדיו באותיות {A,B,C,D}, ונשים לב כי יש מרחקים בין הקדקדים $d(A,B)=d(B,C)=d(C,D)=d(D,A)=1, d(A,C)=d(B,D)=\sqrt{2}$.

א. מצא (רשום) את כל התמורות f (הפונקציות החח״ע ועל) של הקבוצה $\{A,B,C,D\}$ לעצמה אשר גם שומרות על המרחק, כלומר לכל $x,y\varepsilon\{A,B,C,D\}$ f מקיימת כי $d(f(x),f(y))=d(x,y)$.

ב. נסמן את הקבוצה של האיברים שחשבנו בסעיף א ב D_4. הוכח כי זו חבורה.

נתונה קוביה ונסמן את קדקדיה באותיות $\{a,b,c,d,1,2,3,4\}$. נשים לב כי יש מרחקים בין הקדקדים. נסמן ב DD את חבורת כל התמורות שומרות המרחק על הקבוצה $\{a,b,c,d,1,2,3,4\}$. (אין צורך לחשב את כל איברי החבורה DD).

ג. מצא שלש פונקציות שונות α,β,γ שהן הומומורפיזמים חח״ע של חבורות $D_4 \to DD$.

ד. חשב את $\{Im(\alpha) \cap Im(\beta)\}$.

שאלה 5

נתונים חבורה G וח״ח שלה $H \le G$, ונגדיר את $N(G,H)$ על ידי $N(G,H)=\{g\in G \mid gHg^{-1}=H\}$. הוכח כי

א. $N(G,H)$ חבורה חלקית של G.

ב. הוכח כי תמיד $H \le N(G,H)$.

ג. מצא G,H כך ש $N(G,H)=H$.

ד. מצא G,H כך ש $N(G,H)\neq H$.

שאלה 6

הבט בקבוצת הממשיים עם הפעולה הבינרית $x*y=\sqrt[5]{x^5+y^5}$. הוכח כי הקבוצה עם הפעולה היא חבורה. האם היא אבלית?

חלק ב

שאלה 7

תן דוגמא לחוג S, ולארבעה פולינומים בעלי דרגה 2 או יותר f(x)≠g(x) ו p(x)≠q(x) ב S[x] כך שמתקיים f(x)p(x)=g(x)q(x).

שאלה 8

הבט במטריצה $A=\begin{pmatrix} 0 & \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ שהיא אבר $GL(C,2)$ (עם פעולת כפל מטריצות) א. מצא את הסדר שלה וסמן אותו n.

נגדיר העתקה $f:Z_n\to GL(C,2)$ (כאשר ב-Z_n ישנה פעולת החבור מודולו n) על ידי $f(1)=\begin{pmatrix} 0 & \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. ועל ידי תכונות ההומומורפיזם.

ב. כתוב את f בצורה מפורשת. ג. מצא את התמונה ההפוכה של החבורה החלקית $GL(R,2)$.

שאלה 9

הבט על הקבוצה $G=Z_6\times Z_2$ והגדר פעולה $(a,b)*(c,d)=(a+c,b+d)$ כאשר הפעולה ברכיב השמאלי היא החבור מודולו של Z_6 ובימני של Z_2. א. מצא את הסדר של כל אבר בחבורה G.

ב. מצא ח״ח של G שאיננה ציקלית.

שאלה 10

. שתי תמורות של הקבוצה $\mathbb{Z}_7=\{0,1,2,3,4,5,6\}$ מוגדרות ע"י הנוסחאות הבאות:

$$g=\begin{cases}\frac{2x+1}{4-3x} & 6\neq x\in\mathbb{Z}_7\\ b & 6=x\in\mathbb{Z}_7\end{cases},\quad f=\begin{cases}\frac{x+1}{5-3x} & 4\neq x\in\mathbb{Z}_7\\ a & 4=x\in\mathbb{Z}_7\end{cases}$$

(הפעולות מתבצעות ב $\mathbb{Z}_7$.)

א. מצא את a ואת b.

ב. חשב את $f^{-1}g^{-2}$

ג. פרק את $f^{-1}g^{-2}$ למכפלה של מחזורים זרים:

ד. פרק את $f^{-1}g^{-2}$ למכפלה של חילופים

ה. מצא את הסדר של $f^{-1}g^{-2}$.

שאלה 11

חשב את המחלק המשותף $d(x)$ הגדול ביותר של הפולינומים הבאים:

$a(x)=2x^4+3\in\mathbb{Z}_5[x],\ \ b(x)=2x^3+3\in\mathbb{Z}_5[x]$. מצא פולינומים

$u(x),v(x)\in\mathbb{Z}_5[x]$ המקיימים $d(x)=\gcd(a(x),b(x))=a(x)u(x)+b(x)v(x)$.

<u>בהצלחה</u>

תשובות:

תשובה 4

א. נקבל 8 העתקות, ארבעה סבובים

$I\begin{pmatrix}A&B&C&D\\A&B&C&D\end{pmatrix},R\begin{pmatrix}A&B&C&D\\D&A&B&C\end{pmatrix},R^2\begin{pmatrix}A&B&C&D\\C&D&A&B\end{pmatrix},L\begin{pmatrix}A&B&C&D\\B&C&D&A\end{pmatrix}$, וארבעה שקופים

$AC\begin{pmatrix}A&B&C&D\\A&D&C&B\end{pmatrix},BD\begin{pmatrix}A&B&C&D\\C&B&A&D\end{pmatrix},S\begin{pmatrix}A&B&C&D\\D&C&B&A\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}A&B&C&D\\B&A&D&C\end{pmatrix}$

ב. וכעת נכין את טבלת הפעולה עבור D_4:

	I	R	R^2	L	AC	BD	S	T
I	*I	*R	*R^2	*L	*AC	*BD	*S	*T
R	*R	R^2	L	I	T	S	AC	*BD
R^2	*R^2	L	I	R	BD	AC	*T	*S
L	*L	I	R	R^2	*S	*T	*BD	*AC
AC	*AC	T	BD	*S	I	R^2	R	*L
BD	*BD	S	AC	*T	R^2	I	*L	*R
S	*S	BD	*T	*AC	L	*R	I	*R^2
T	*T	*AC	*S	*BD	*R	*L	*R^2	I

מתוך 64 התוצאות, אלו המסומנים ב *, ומספרם 37, הם מידיים, ורק 27 חישובים נעשו באמת.

ההוכחה שזו חבורה פשוטה. הרכבת פונקציות חח״ע היא חח״ע, הרכבת פונקציות על היא פונקציה על, והרכבת שומרות מרחק היא שומרת מרחק כיון שאם f,g שומרות מרחק אז גם gf מקיימת לכל X,Y כי $d(gf(X),gf(Y))=d(f(X),f(Y))=d(X,Y)$, ולכן יש סגירות. הרכבת פונקציות הוכחה כשומרת על קבוץ. פונקצית הזהות היא אבר היחידה, והקשר $d(f(X),f(Y))=d(X,Y)$ משמעו כי עבור ההפוכה g של f מתקיים $d(f(X),f(Y))=d(X,Y)=d(g(f(X)),g(f(Y))$, כלומר עבור זוג נקודות כלשהן f(X),f(Y) g היא פונקציה שומרת מרחק.

ג. נגדיר העתקה α על ידי זה שנפריד את {a,b,c,d,1,2,3,4} לשתי פאות נגדיות {a,b,c,d} ו {1,2,3,4} וכל אבר של D_4 יפעל גם על הפאה הראשונה וגם על השניה. כעת נגדיר העתקה β על ידי זה שנפריד את {a,b,c,d,1,2,3,4} לשתי פאות נגדיות {a,b,1,2} ו {c,d,3,4} וכל אבר של D_4 יפעל גם על הפאה הראשונה וגם על השניה. כעת נגדיר העתקה γ על ידי זה שנפריד את {a,b,c,d,1,2,3,4} לשתי פאות נגדיות {a,d,1,4} ו {b,c,2,3} וכל אבר של D_4 יפעל גם על הפאה הראשונה וגם על השניה.

ד. הפעולה היחידה ששומרת על כל הפאות היא הזהות.

תשובה 5.

א. קודם כל N לא ריקה כי $eHe^{-1}=H, e\in N(G,H)$. וכן אם $g\in N(G,H)$ אז $gHg^{-1}=H$ ואז $g^{-1}Hg=g^{-1}H(g^{-1})^{-1}=H$ כלומר N סגורה לגבי הפכי ונותר לראות כי היא סגורה לפעולה, ואכן אם f,g הם ב N אז גם fg ב N כיון שמתקיים $(fg)H(fg)^{-1}=fgHg^{-1}f^{-1}=fHf^{-1}=H$. ב. ברור כי לכל h ב H מתקיים כי $hH=H,Hh^{-1}=H$ לפי תכונות ח״ח, ולכן H ח״ח של N(G,H). ג. אם G אבלית אז $gHg^{-1}=gg^{-1}H=eH=H$, כלומר כל אבר הוא ב N(G,H). ד. כדי למצוא אבר שאיננו ב N(G,H) על G להיות לא אבלית. נבחר $G=S_3$, ואת H נבחר להיות {I,A}. אז עבור $g=R,g^{-1}=L$ מתקיים כי RAL=B, כלומר לא בח״ח {I,A} ולכן $N(S_3,\{I,A\})\neq S_3$, כדרוש.

תשובה 6

ברור כי $x*y=\sqrt[5]{x^5+y^5}$ הוא ממשי ולכן יש סגירות. ברור כי 0 הוא אבר יחידה וכי x– הוא ההפכי של x. ברור כי $y*x=\sqrt[5]{y^5+x^5}=\sqrt[5]{x^5+y^5}=x*y.$, כלומר החבורה אבלית. ובקשר לקבוץ $(x*y)*z=\sqrt[5]{(\sqrt[5]{x^5+y^5})^5+z^5}=\sqrt[5]{x^5+y^5+z^5}=\sqrt[5]{x^5+(\sqrt[5]{y^5+z^5})^5}=x*(y*z).$

תשובה 7

נביט בחוג $\mathbb{Z}_4$, ובפולינום f(x)=p(x) כלשהו, ונגדיר g(x)=q(x)=f(x)+2(1+x). אז מתקיים g(x)q(x)=(f(x)+2(1+x))(f(x)+2(1+x))=f(x)²+4(1+x)f(x)+4(1+x)² כלומר g(x)q(x)=f(x)f(x)=f(x)p(x), כדרוש.

תשובה 8

$$A=\begin{pmatrix}0 & \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\\ 1 & 0\end{pmatrix}, A^2=\begin{pmatrix}\frac{-1+\sqrt{3}i}{2} & 0\\ 0 & \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\end{pmatrix}, (\frac{-1+\sqrt{3}i}{2})^3=1, (A^2)^3=I, o(A)=1,2,3,6,$$

$$A^3=\begin{pmatrix}0 & -\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\\ \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} & 0\end{pmatrix}$$

לכן הסדר של A הוא 6.

א. מכיון ש f שולחת איבר מסדר 6 לאבר מסדר 6, היא מגדירה איזומורפיזם של חבורות ציקליות מאותו סדר.

ב. האיבר $A^6=I$ הוא היחיד שתמונתו היא מטריצה הפיכה ממשית, ולכן התמונה ההפוכה היא הקבוצה $\{0\}$ שהיא הח"ח הטריביאלית.

תשובה 9

א.

$$(0,1)^2=(0,0), o(0,1)=2, (1,0)^6=(0,0), o(1,0)=6, (1,1)^6=(0,0), o(1,1)=6.$$
$$(2,0)^3=(0,0), o(2,0)=3, (2,1)^3=(0,1), (2,1)^6=(0,0), o(2,1)=6, (3,0)^2=(0,0),$$
$$o(3,0)=2, (3,1)^2=(0,0), o(3,1)=2, (4,0)^3=(0,0), o(4,0)=3, (4,1)^3=(0,1),$$
$$(4,1)^6=(0,0), o(4,1)=6, (5,0)^6=(0,0), o(5,0)=6, (5,1)^6=(0,0), o(5,1)=6.$$

ב. נביט כל האיברים שהסדר שלהם הוא 1 או 2, וזוהי הקבוצה $\{(0,1),(3,0)(3,1),(0,0)\}$ קל לראות שזו ח"ח בת 4 איברים, אין בה איבר מסדר 4 ולכן איננה ציקלית. גם החבורה כולה יש בה 12 איברים אך אף אחד לא בעל סדר 12, ולכן איננה ציקלית.

תשובה 10

נחשב את f ואת g בצורה מפורשת. עבור f:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1/5 & 2/2 & 3/(-1) & 4/(-4) & 5/(-7) & 6/(-10) & 7/(-13) \\ 1/5 & 1 & 3/6 & 4/3 & 5/0 & 6/4 & 0/1 \\ 3 & 1 & 4 & 6 & ? & 5 & 0 \end{array}$$

ולכןנקבל את f על ידי:

$$f\downarrow\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 6 & 2 & 5 & 0 \end{array}$$

ובצורה דומה עבור g

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1/4 & 3/1 & 5/(-2) & 7/(-5) & 9/(-8) & 11/(-11) & 13/(-14) \\ 1/4 & 3 & 5/5 & 0/2 & 2/6 & -1 & 6/0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 5 & 6 & 4 \end{array}$$

ולכןנקבל את g על ידי:

$$g\downarrow\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 5 & 6 & 4 \end{array}$$

וגם את g^2:

x	0	1	2	3	4	5	6
$g(x)$	2	3	1	0	5	6	4
$g^2(x)$	1	0	3	2	6	4	5

וכעת נחשב את ההפוכים:

$$f\downarrow\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 6 & 2 & 5 & 0 \end{array}$$

$$f^{-1}\downarrow\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 4 & 0 & 2 & 5 & 3 \end{array}$$

x	0	1	2	3	4	5	6
$g(x)$	2	3	1	0	5	6	4
$g^2(x)$	1	0	3	2	6	4	5
$g^{-2}(x)$	1	0	3	2	5	6	4

ולבסוף נקבל את ההרכבה:

x	0	1	2	3	4	5	6
$g^{-2}(x)$	1	0	3	2	5	6	4
$f^{-1}(x)$	6	1	4	0	2	5	3
$f^{-1}g^{-2}(x)$	1	6	0	4	5	3	2

העתקה זו היא מהצורה $(0162)(345)$ ובעלת סדר 12, ונקבל אותה כמכפלת חלופים: $(01)(16)(62)(34)(45)$.

תשובה 11

$$2x^4+3=(2x^3+3)x+(2x+3)$$
$$(2x^3+3)=(2x+3)(x^2+x+1), \mathrm{gcd}=2x+3.$$

$$2x+3=(2x^4+3)-1(2x^3+3)x.$$