המכללה האקדמית נתניה ע"ר
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

NETANYA ACADEMIC COLLEGE (R"S)
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

מבחן סוף במבנים אלגבריים למדעי המחשב-סמסטר קיץ ה'תשע"ח.

מועד א יום ב ח תשרי התשע"ט 17-9-2018

- מורה : גיורא דולה, מתרגל : רענן שכטר.
- משך המבחן הוא שלש שעות.
- אפשר להשתמש רק במחשבון ובדפי העזר המצורפים.
- יש לכתוב במחברת תשובה מלאה עבור כל אחת מהשאלות.
- במבחן יש ארבעה חלקים. בחלק א שתי שאלות ומשקל כל שאלה 10 נקודות. בחלק ב יש 2 שאלות ומשקל כל שאלה 15 נקודות. אפשר לענות על כמה שאלות שרותים מחלקים א ו ב. בחלק ג יש 4 שאלות ומשקל כל שאלה 15 נקודות. ומתוכן יש לבחור 3. בחלק ד יש שאלה אחת ומשקלה 5 נקודות.
- 2*10+2*15+3*15+1*5=100
- מותר להסתמך על כל טענה שהוכחה בכתה אך יש לנסח אותה במדויק בנפרד.

בהצלחה.

חלק א

שאלה 1

שתי תמורות על הקבוצה $\mathbb{Z}_7=\{0,1,2,3,4,5,6\}$ מוגדרות על ידי הנוסחאות הבאות (הפעולות מבוצעות ב $\mathbb{Z}_7$).

$$f=\begin{cases}\dfrac{2x+1}{3x+2} & 4\neq x\in\mathbb{Z}_7\\ a & 4=x\in\mathbb{Z}_7\end{cases},\; g=\begin{cases}\dfrac{x+1}{3x+1} & 2\neq x\in\mathbb{Z}_7\\ b & 2=x\in\mathbb{Z}_7\end{cases}$$

א. מצא את a ואת b.
ב. חשב את $f^{-1}g^{-2}$.
ג. פרק את $f^{-1}g^{-2}$. למכפלה של מחזורים זרים.
ד. פרק את $f^{-1}g^{-2}$. למכפלה של חילופים.
ה. מצא את הסדר של $f^{-1}g^{-2}$.

שאלה 2

חשב את המחלק המשותף $d(x)$ הגדול ביותר של הפולינומים הבאים:
$a(x)=x^4+3x^3+3x^2+3x+3\in\mathbb{Z}_7[x],\quad b(x)=x^3+4x^2+4\in\mathbb{Z}_7[x]$. מצא פולינומים
$u(x),v(x)\in\mathbb{Z}_7[x]$ המקיימים $\mathrm{d(x)=gcd}(a(x),b(x))=a(x)u(x)+b(x)v(x)$.

חלק ב

שאלה 3

נביט בשתי המטריצות הבאות:

$$S=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},T=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},$$

א. חשב את הסדרים של S ושל T.

ב. בטא את TS בתור אבר של הקבוצה $G=\left\{S^iT^j,0\le i,j\right\}$.

ג. נפלו טעויות בשאלון בסעיפים ג ו ד.

שאלה 4

נתונה החבורה $G=(\mathbb{Z}_{35}^*,\cdot)$. (כל האיברים ההפיכים עם פעולת הכפל).

א רשום את כל האיברים ב G.

ב . חשב את 4^{122} ב-G.

ג. מצא את כל הסדרים של אברי החבורה.

חלק ג

שאלה 5

הוכח בחוג הפולינומים $S[x]$. עבור שדה S., לכל שני פולינומים $p(x),q(x)$ קימים פולינומים $a(x),b(x)$ כך שמתקים השויון

$$a(x)p(x)+b(x)q(x)=\gcd(p(x),q(x))$$

שאלה 6

נתונים חבורה G וח"ח H. עבור $\forall g,h,k\in G$ הוכח :

א*. $\forall g \quad g\in g*H$

ב*. $\forall g,k\in G, k\in g*H\to k*H\subseteq g*H$.

ג*. $\forall g,k\in G, k\in g*H\to k*H=g*H$.

ד*. $\forall g,k\in G,\ [(g*H\cap k*H\neq\varnothing)\to(g*H=k*H)]$.

ה*. $a_g: H \to g*H \quad \forall g$ היא פונקציה חח"ע ועל.

ו*. $G = \bigcup_{g \in G} g*H$.

.

שאלה 7

נגדיר יחס על אוסף כל החבורות: G מתיחסת ל H אם קים איזומורפיזם של G על H . הוכח כי היחס הוא יחס שקילות.

שאלה 8

יהי $f: G \to H$ הומומורפיזם של חבורות. אז

א. $f(e_G) = e_H$.

ב. $f(g^{-1}) = (f(g))^{-1} \quad \forall g \in G$.

ג. $f(g^n) = (f(g))^n \quad \forall n \in \mathbf{Z} \quad \forall g \in G$ ..

<u>חלק ד</u>

שאלה 9

נתונות חבורה G וח"ח H. עבור אבר $g \in G$ נגדיר את המחלקה השמאלית של g על ידי $gH = \{gh, h \in H\}$ ואת המחלקה הימנית של g על ידי $Hg = \{hg, h \in H\}$. נגיד כי H נורמלית ב G אם לכל מתקיים $gH = Hg$.

א. תן דוגמא ל ח"ח נורמלית.

ב. תן דוגמא לח"ח שאיננה נורמלית.

ג. הוכח כי עבור H נורמלית , אם $gH = xH$ ובאם $kH = yH$ אז

$gkH = yxH$

ד. תן דוגמא של , H, g, x, k, y כך ש $gH = xH$ $kH = yH$ ו $gkH \neq yxH$

<u>בהצלחה</u>

תשובה 1

נחשב את f ואת g בצורה מפורשת. עבור f :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1/2 & 3/5 & 5/8 & 7/11 & 9/14 & 11/17 & 13/20 \\ 1/2 & 3/5 & 5 & 0 & ? & 4/3 & 6/6 \\ 4 & 2 & 5 & 0 & ? & 6 & 1 \end{array}$$

ולכן נקבל את f על ידי :

$$f \downarrow \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 5 & 0 & 3 & 6 & 1 \end{array}$$

ובצורה דומה עבור עבור g

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1/1 & 2/4 & 3/7 & 4/10 & 5/13 & 6/16 & 7/19 \\ 1 & 4 & ? & 4/3 & 5/6 & 6/2 & 0 \\ 1 & 4 & ? & 6 & 2 & 3 & 0 \end{array}$$

ולכן נקבל את g

על ידי :

$$g \downarrow \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 5 & 6 & 2 & 3 & 0 \end{array}$$

וגם את g^2 :

x	0	1	2	3	4	5	6
$g(x)$	1	4	5	6	2	3	0
$g^2(x)$	4	2	3	0	5	6	1

וכעת נחשב את ההפוכים :

$$f\downarrow \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 5 & 0 & 3 & 6 & 1 \end{matrix}$$

$$f^{-1}\downarrow \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 0 & 2 & 5 \end{matrix}$$

x	0	1	2	3	4	5	6
$g(x)$	1	4	5	6	2	3	0
$g^2(x)$	4	2	3	0	5	6	1
$g^{-2}(x)$	3	6	1	2	0	4	5

ולבסוף נקבל את ההרכבה :

x	0	1	2	3	4	5	6
$g^{-2}(x)$	3	6	1	2	0	4	5
$f^{-1}(x)$	3	6	1	4	0	2	5
$f^{-1}g^{-2}(x)$	4	5	6	1	3	0	2

העתקה זו היא מהצורה

(26)(04315) ובעלת סדר 10, ונקבל אותה כמכפלת חלופים : (26) (05)(01)(03)(04)

תשובה 2

$$x^4+3x^3+3x^2+3x+3=(x^3+4x^2+4)(x+6)+6x$$
$$(x^3+4x^2+4)=6x(6x^2+3x)+4.$$
$$6x=4(5x)+0,\mathrm{gcd}=4$$

$$4=(x^3+4x^2+4)-6x(6x^2+3x)=$$
$$=(x^3+4x^2+4)-[x^4+3x^3+3x^2+3x+3-(x^3+4x^2+4)(x+6)](6x^2+3x)=$$
$$=a(x)(6x^2+3x)+b(x)[1-(x+6)(6x^2+3x)]$$

תשובה 3

$$S=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},T=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},S^1=S,S^2=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix},S^3=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},S^4=I_2,T^1=T,$$
$$T^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},T^3=I,ST=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix},(ST)^2=I,STST=I,STS=T^2,TS=S^3T^2,$$
$$o(S)=0(S^3)=4,o(S^2)=2,o(T)=o(T^2)=3,o(ST)=2$$

תשובה 4

קודם כל נחשב את כל האיברים שיש להם ממם (gcd) 1 עם 35 והללו הם
1,2,3,4,6,8,9,11,12,13,16,17,18,19,22,23,24,26,27,29,31,32,33,34 כלומר החבורה
הזו היא בת 24 איברים. כעת נחשב את הסדר של 4 :

$$4^1=4$$
$$4^2=16$$
$$4^3=64=29,$$
$$4^4=4\cdot 29=116=11$$
$$4^5=4\cdot 11=44=9,$$
$$4^6=9\cdot 4=36=1$$
$$4^{122}=4^{15\cdot 6+2}=4^2=16,$$
$$2^3=8,2^5=32,2^7=2^{6+1}=4^3 2=29\cdot 2=23,$$
$$2^9=2^{8+1}=4^4 2=11\cdot 2=22$$
$$2^{11}=2^{10+1}=4^4 2=9\cdot 2=18$$
$$2^{12}=36=1$$

החבורה החלקית אשר נוצרת על ידי 2 היא .
$2,4,8,16,32,29,23,11,22,9,18,1=1,2,4,8,9,11,16,18,22,23,29,32$ נביט באיברים הנותרים

$1, 2, 4, 8, 9, 11, 16, 18, 22, 23, 29, 32$

$3^2 = 9 = 4^5, 3^3 = 27, 3^4 = 81 = 11, 3^5 = 11\cdot 3 = 33, 3^6 = 4^{15} = 4^3 = 29, 3^{12} = 29^2 = 841 = 1$

$6^2 = 1$

$8^2 = 64 = 4^3 = 29, 8^4 = 4^6 = 1$

$9^2 = 3^4, 9^6 = 3^{12} = 1$

$12^2 = 144 = 4, 12^3 = 12\cdot 4 = 48 = 13, 12^4 = 4\cdot 4 = 16 = 4^2, 12^6 = 4^3 = 29, 12^{12} = 4^6 = 1$

$13^2 = 169 = 29 = 4^3, 13^3 = 13\cdot 29 = 377 = 27, 13^4 = 4^6 = 1$

$17^2 = 289 = 9 = 3^2, 17^3 = 17\cdot 3 = 51 = 16 = 4^2, 17^4 = 3^4 = 11, 17^6 = 3^6 = 29, 17^{12} = 3^{12} = 1$

$19^2 = 361 = 11 = 3^4, 19^3 = 19\cdot 11 = 209 = 34, 19^4 = 3^8 = 121 = 16, 19^6 = 3^{12} = 1,$

$24^2 = 576 = 16 = 4^2, 24^3 = 24\cdot 16 = 384 = 34, 24^4 = 4^4, 24^6 = 4^6 = 1$

$26^2 = 676 = 11 = 19^2, 26^3 = 26\cdot 11 = 286 = 6, 26^4 = 19^4 = 1,$

$27 = 3^3, 27^2 = 3^6 = 29, 27^3 = 3^9, 27^4 = 3^{12} = 1$

$31^2 = 361 = 11 = 19^2, 31^3 = 31\cdot 11 = 341 = 26, 31^4 = 19^4 = 16, 31^6 = 19^6 = 1$

$33^2 = 1089 = 4 = 2^2, 33^3 = 33\cdot 4 = 132 = 27, 33^4 = 2^4 = 16, 33^6 = 2^6 = 29, 33^{12} = 2^{12} = 1$

$34 = 19^3, 34^2 = 19^6 = 1$

לכן החבורה איננה ציקלית כיון שאין לה איבר מסדר 8. בנוסף $137 = 136 + 1 = 4\cdot 34 + 1$ ולכן $7^{137} = 7^{4\cdot 34+1} = (7^4)^{34} 7 = 1\cdot 7 = 7$ כדרוש.

יש 4 איברים מסדר 4 והם יוצרים 2 ח"ח מסדר 4 אשר איזומורפיות ל $\mathbb{Z}_4$ האחת מכילה את 3 ו 7, השניה את 13 ואת 17. יש 3 איברים מסדר 2 והללו יוצרים 3 ח"ח בנות שני איברים אשר איזומורפיות ל $\mathbb{Z}_2$, ובנוסף 3 האברים מסדר 2 יוצרים ח"ח בת ארבעה איברים אשר איזומורפית לחבורת קליין $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, ואשר כוללת את 3 החבורות החלקיות האיזומורפיות ל $\mathbb{Z}_2$ כחבורות חלקיות. לכן יש 2+3+1 חבורות חלקיות אמיתיות, ובנוסף החבורות החלקיות הטריוויאליות בנות אבר אחד וכל G, סה"כ 8 חבורות חלקיות.

תשובה 9

א. אם החבורה G אבלית אז לכל $g, k \in G$ מתקיים $gk = kg$ וביחוד לכן מתקיים $gh = hg, \forall h \in H$

ב. נבחר חבורה לא אבלית $S_3 = \{I, R, L, A, B, C\}$ ואת הח"ח $H = \{I, A\}$ ואת האבר $B \in S_3$. אז $BH = B\{I, A\} = \{B, BA\}$ וכן $HB = \{I, A\}B = \{B, AB\}$ ומכיון ש $AB \neq BA$ נובע אי שויון קבוצות $BH \neq HB$

ג. כיון ש H נורמלית, אז $gH = xH = Hx$ וכן $kH = yH = Hy$ ולכן

$gkH = gxH = gHx = yHx = yxH$.

ד. שוב נבחר חבורה לא אבלית $S_3 = \{I, R, L, A, B, C\}$ ואת החי"ח

$H = \{I, A\}$ ואת האברים $(x = R), (y = L), (g = B), (k = C) \in S_3$. אז

$R\{I, A\} = B\{I, A\} = \{B, R\}$ וכן $L\{I, A\} = C\{I, A\} = \{C, L\}$ אבל

$xy\{I, A\} \neq gk\{I, A\}$