NETANYA ACADEMIC COLLEGE
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

המכללה האקדמית נתניה
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

מבחן סוף במבנים אלגבריים למדעי המחשב-הנדסאים-סמסטר קיץ.

מועד א, יום א,יא תשרי התשס"ח 23-9-2007

- מורה: גיורא דולה, מתרגל: רענן שכטר.
- משך המבחן הוא שעתים וחצי.
- אפשר להשתמש רק במחשבון ובדפי עזר המצורפים לבחינה.
- יש לכתוב במחברת תשובה מלאה על כל אחת מהשאלות

בהצלחה.

Fax: (972-9) 8607711 **:פקס** **Tel:** (972-9) 8607777 **:טל**

ענה על כל ארבע השאלות הבאות

1. הוכח כי Z_n הוא חוג קומוטטיבי עם יחידה.

2. הוכח את משפט Euler.

3. נתונות החבורה הנוצרת על ידי אבר אחד (ציקלית) Z_n וחבורה כלשהי G. א הוכח כי כל הומומורפיזם $f: Z_n \to G$, נקבע על ידי $f(1)$. ב. עבור $G=Z_n$ מצא כמה הומומורפיזמים קימים. ג. כמה מההומומורפיזמים של הסעיף הקודם הם איזומורפיזמים?

4. נתונות חבורה G וחבורה חלקית שלה H. נגדיר את הקבוצה N כקבוצת כל האיברים x של G כך שהמחלקה השמאלית xH והמחלקה הימנית Hx שוות כקבוצות, כלומר $xH=Hx$. הוכח כי N חבורה חלקית של G. הוכח כי H□N.

מתוך חמשת התרגילים הבאים בחר ארבעה:

5. שתי תמורות של הקבוצה $\mathbf{Z}_7 = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ מוגדרות ע"י הנוסחאות הבאות: $f = (1,2,6,0)(0,4)$, $g(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{3x+1}, & x \neq 2 \\ 5, & x = 2 \end{cases}, x \in \mathbf{Z}_7$ (הפעולות מתבצעות ב- $\mathbf{Z}_7$).

פרק את התמורה $f^{-1}g^2$ למכפלה של מחזורים זרים ומצא את סדר שלה

6. נתון רבוע שקדקדיו מסומנים a,b,c,d. מוציאים את הרבוע ממקומו ומכניסים אותו חזרה, ומקבלים חבורה הקרויה: חבורת כל האיזומורפיזמים של הרבוע. (שם נוסף-החבורה הדיאדרלית D). רשום את כל איברי החבורה וליד כל אבר רשום את הסדר שלו.

7. נתונות חבורה סופית G וחבורה חלקית שלה H. הוכח כי מספר המחלקות הימניות והשמאליות של H ב-G שווה.

8. נתונים הומומורפיזם $f: G\rightarrow H$ ואבר x של G. הוכח כי הסדר של f(x) מחלק את הסדר של x. הוכח כי אם f איזומורפיזם אז יש שויון סדרים.

9.חשב את המחלק המשותף הגדול ביותר של הפולינומים הבאים:
$a(x)=x^4+x^3+3x^2-x+1\in \mathbf{Z}_7[x],\ \ b(x)=x^3-x^2+x+4\in \mathbf{Z}_7[x]$.

תשובות:

3.א. $Z_n=<1>$ ונוכיח כי לכל חבורה הנוצרת על ידי אבר אחד, $<x>$, f(x) קובע את כל f. ברור כי $f(x^2)=(f(x))^2$ ובאותו אופן $f(x^n)=(f(x))^n$, $f(x^{-1})=(f(x))^{-1}$. לכן אם ידוע f(x) נקבע כל f.
ב.הוכחנו כי הסדר של f(x) מחלק את הסדר של x. הסדר של $1\in Z_n$ הוא n, והוכחנו כי הסדר של כל איבר ב-G מחלק את הסדר של G. לכן לכל אבר ב- יש סדר אשר מחלק את n ולכן הוא יכול להיות f(1). לכן מספר ההומומורפיזמים הוא n.
ג. איזומורפיזם שומר על סדר של איברים, ולכן כדי ש-f יהיה איזומורפיזם, על f(1) להיות בעל סדר n , כלומר ב-$<f(1)>$ יש n איברים שונים, כלומר $<f(1)>=Z_n$. לכן גם 1 הוא כפולה של f(1) כלומר על f(1) להיות הפיך כפלית בחוג Z_n. לכן מספר האיזומורפיזמים הוא פונקצית Euler , כלומר $\varphi(n)$.

4. נוכיח כי N סגורה לכפל, כלומר לכל שני איברים $x,y\in N$ נוכיח כי $xy\in N$. ואכן מתקים $(xy)H=x(yH)=x(Hy)=(xH)y=(Hx)Y=H(xy)$. ברור כי $eH=H=He$ ולכן $e\in N$. נוכיח כי ההפכי של $x\in N$ הוא ב-N. ואכן: $xH=Hx\rightarrow x^{-1}xH=x^{-1}Hx\rightarrow H=x^{-1}Hx\rightarrow Hx^{-1}=x^{-1}H$

$$g(1)=\frac{2}{4}=2\cdot 2=4, g(2)=5, g(3)=\frac{4}{10}=\frac{4}{3}=4\cdot 5=20=6, g(4)=\frac{5}{13}=\frac{5}{6}=5\cdot 6=30=2,$$
$$g(5)=\frac{6}{16}=\frac{6}{2}=6\cdot 4=24=3, g(6)=\frac{7}{19}=\frac{7}{5}=7\cdot 3=21=0, g(0)=\frac{1}{1}=1\cdot 1=1,$$
$$(0,1,2,3,4,5,6)\xrightarrow{g}(1,4,5,6,2,3,0), (0,1,2,3,4,5,6)\xrightarrow{g^2}(4,2,3,0,5,6,1).$$

5. $(0,4)=(0,1,2,3,4,5,6)\to(4,1,2,3,0,5,6), (0,1,2,6)=(0,1,2,3,4,5,6)\to(1,2,6,3,4,5,0),$
$$f=(1,2,6,0)(0,4)=(0,1,2,3,4,5,6)\to(4,1,2,3,0,5,6)\to(4,2,6,3,1,5,0),$$
$$(0,1,2,3,4,5,6)\xrightarrow{f^{-1}}(6,4,1,3,0,5,2), f^{-1}g^2=(0,1,2,3,4,5,6)\to(0,1,3,6,5,2,4).$$
$$f^{-1}g^2=(0)(1)(2,3,6,4,5), o(f^{-1}g^2)=5.$$

6. אם יודעים את תמונותיהם של a ושל b אז קבענו להיכן הולכת צלע. עבור a יש 4 אפשרויות, ועבור b רק 2 אפשרויות, אלו האותיות הסמוכות לתמונה של a, ולכן בחבורה D יש 8 איברים.

abcd→abcd, איבר היחידה מסדר 1

abcd→adcb, abcd→cbad, abcd→badc, abcd→dcba שקופים מסדר 2

abcd→cdab סבוב מסדר 2

abcd→bcda, abcd→dabc סבובים מסדר 4

נשים לב כי כפי שהוכחנו, הסדר של כל אבר מחלק את 8, וכי במקרה זה, אין אף אבר מסדר 8, כלומר, אין אף אבר אשר יוצר את D.

7. גם מספר המחלקות הימניות, וגם מספר המחלקות השמאליות שווה ל $|G|/|H|$ לפי משפט Lagrange.

8.

$$x^{o(x)}=e\to f(x^{o(x)})=f(e)=e\to f(x)^{o(x)}=e$$ ולכן o(x) הוא כפולה של o(f(x)) או ההפך, o(f(x)) מחלק את o(x). אם f איזומורפיזם אז $o(f^{-1}(f(x))=o(x)$ מחלק את o(f(x)) ולכן הם שווים.

9.

$$\frac{x^4+x^3+3x^2+6x+1}{x^3+6x^2+x+4}=x+2+\frac{4x^2}{x^3+6x^2+x+4},$$
$$\frac{x^3+6x^2+x+4}{4x^2}=\frac{2(x^3+6x^2+x+4)}{x^2}=2x+5+\frac{2x+1}{x^2},$$
$$\frac{x^2}{2x+1}=4x+5+\frac{2}{2x+1},\frac{2x+1}{2}=x+4,\mathrm{gcd}=2=1$$