המכללה האקדמית נתניה
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

NETANYA ACADEMIC COLLEGE
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

מבחן סוף במבנים אלגבריים למדעי המחשב-סמסטר קיץ כתת הנדסאים תשע"ד.

מועד ב,יום ד,יא כסלו התשע"ה 3-12-2014

- מורה : גיורא דולה, מתרגל : רענן שכטר.
- משך המבחן הוא שלש שעות.
- אפשר להשתמש רק במחשבון ובדפי העזר המצורפים.
- יש לכתוב במחברת תשובה מלאה על כל אחת מהשאלות.
- במבחן יש שני חלקים. בחלק א יש 6 שאלות ומתוכן יש לבחור 4. משקל כל שאלה בחלק א 15 נקודות. בחלק ב חמש שאלות מתוכן יש לבחור 4 ומשקל כל שאלה 10 נקודות. ס"הכ $4*15+4*10=100$.
- בכל שאלת 'הוכחה' בחלק הראשון יש להקפיד על נסוח טענות עזר ועל נמוקים.

בהצלחה.

Fax: (972-9) 8607711 **:פקס** **Tel:** (972-9) 8607777 **:טל**

חלק א

שאלה 1

הוכח את המשפט כי אם S שדה, ונתונים $p(x),q(x)\in S[x]$, אז קיימים פולינומים $m(x),r(x)\in S[x]$ כך שמתקיים $p(x)=q(x)m(x)+r(x), \deg(r(x))<\deg(q(x)).$, וכך ש- $m(x),r(x)\in S[x]$ יחידים.

שאלה 2

הוכח כי $\mathbb{Z}_n$ הוא חוג מתחלף (עם יחידה).

שאלה 3

נסח והוכח את משפט לגרנג'.

שאלה 4

הוכח כי עבור $g\in G$ כלשהו מתקיים

א. אם $o(g)=\infty$ אז $(<g>,*)\cong(\mathbb{Z},+)$.

ב. אם $o(g)=n<\infty$ אז $(<g>,*)\cong(\mathbb{Z}_n,+)$.

שאלה 5

נתון רבוע ונסמן את קדקדיו באותיות $\{A,B,C,D\}$, ונשים לב כי יש מרחקים בין הקדקדים $d(A,B)=d(B,C)=d(C,D)=1$.וכמו כן יש מרחקים אחרים בין הקדקדים, $d(A,C)=d(B,D)=\sqrt{2}$.

א. מצא (רשום) את כל התמורות f (הפונקציות החח"ע ועל) של הקבוצה $\{A,B,C,D\}$ לעצמה אשר גם שומרות על המרחק, כלומר לכל

x,yε{A,B,C,D} f מקיימת כי d(f(x),f(y))=d(x,y). נסמן את הקבוצה של האיברים שחשבנו בסעיף א ב D_4. ידוע כי זו חבורה.

ב. חשב את הסדר של כל אבר ב D_4.

ג. מצא האם קים הומומורפיזמים חח"ע $\alpha:\mathbb{S}_3\to D_4$ כאשר החבורה S_3 נלמדה בכתה.

ד. מצא $\beta:D_4\to\mathbb{Z}_2$ שהיא הומומורפיזם על של חבורות.

שאלה 6

נתונה חבורה G כלשהי בת 9 איברים. מצא כמה איברים יש לה מכל סדר.

חלק ב

שאלה 7

תן דוגמא לחבורה (G,*) בעלת 5 חבורות חלקיות שונות ורשום את החבורה ואת כל החבורות החלקיות.

שאלה 8

הבט במטריצה $A=\begin{pmatrix} 0 & \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$ שהיא אבר $GL(C,3)$ (עם פעולת כפל מטריצות) א. מצא את הסדר שלה וסמן אותו n.

נגדיר העתקה $f:\mathbb{Z}_n\to GL(C,3)$ (כאשר ב $\mathbb{Z}_n$ ישנה פעולת החבור מודולו n) על ידי $f(1)=\begin{pmatrix} 0 & \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$. ועל ידי תכונות ההומומורפיזם.

ב. כתוב את f בצורה מפורשת. ג. מצא את התמונה ההפוכה של החבורה החלקית $GL(R,3)$.

שאלה 9

הבט על הקבוצה $G=\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_3$ והגדר פעולה $(a,b)*(c,d)=(a+c,b+d)$ כאשר הפעולה ברכיב השמאלי היא החבור מודולו של $\mathbb{Z}_4$ ובימני של $\mathbb{Z}_3$. א. מצא את הסדר של כל אבר בחבורה G. ב. האם יש ח"ח של G שאיננה ציקלית? נמק.

שאלה 10

. שתי תמורות של הקבוצה $\mathbb{Z}_7=\{0,1,2,3,4,5,6\}$ מוגדרות ע"י הנוסחאות הבאות:

$$f=\begin{cases}\frac{x+3}{5-x} & 5\neq x\in\mathbb{Z}_7\\ a & 5=x\in\mathbb{Z}_7\end{cases},\quad g=\begin{cases}\frac{2x+3}{4-x} & 4\neq x\in\mathbb{Z}_7\\ b & 4=x\in\mathbb{Z}_7\end{cases}$$

(הפעולות מתבצעות ב $\mathbb{Z}_7$).

א. מצא את a ואת b.

ב. חשב את $f^{-1}g^{-2}$

ג. פרק את $f^{-1}g^{-2}$ למכפלה של מחזורים זרים:

ד. פרק את $f^{-1}g^{-2}$ למכפלה של חילופים

ה. מצא את הסדר של $f^{-1}g^{-2}$.

שאלה 11

חשב את המחלק המשותף $d(x)$ הגדול ביותר של הפולינומים הבאים:

$a(x)=x^4+4x+3\in\mathbb{Z}_5[x],\ \ b(x)=x^3+x^2+x-4\in\mathbb{Z}_5[x]$. מצא פולינומים $u(x),v(x)\in\mathbb{Z}_5[x]$ המקיימים $d(x)=\gcd(a(x),b(x))=a(x)u(x)+b(x)v(x)$.

<u>בהצלחה</u>

תשובות:

תשובה 5

א. נקבל 8 העתקות, ארבעה סבובים

$$I\begin{pmatrix}A&B&C&D\\A&B&C&D\end{pmatrix},\ f\begin{pmatrix}A&B&C&D\\D&A&B&C\end{pmatrix},\ f^2\begin{pmatrix}A&B&C&D\\C&D&A&B\end{pmatrix},\ g\begin{pmatrix}A&B&C&D\\B&C&D&A\end{pmatrix}$$

וארבעה שקופים

$$-I\begin{pmatrix}A&B&C&D\\D&C&B&A\end{pmatrix},\ -f\begin{pmatrix}A&B&C&D\\C&B&A&D\end{pmatrix},\ -f^2\begin{pmatrix}A&B&C&D\\B&A&D&C\end{pmatrix},\ -g\begin{pmatrix}A&B&C&D\\A&D&C&B\end{pmatrix}$$

ב. נחשב את הסדר של כל איבר.

$o(-I)=o(-f)=o(-f^2)=o(g)=2, o(g)=4, o(f^2)=2, o(f)=4, o(I)=1$. כדי למצוא הומומורפיזם חח"ע מקבוצת התמורות של $\{X,Y,Z\}$ נזכר כי הסדר של התמונה מחלק את הסדר של המקור. יש ב $\mathbb{S}_3$ 2 איברים מסדר 3, ואין ב D_4, ולכן על תמונותיהם להיות בעלי סדר 1, כלומר הם הולכים ל-I של D_4. התקבלו שני איברים שונים מסדר 2 בעלי תמונה זהה ולכן אין הומומורפיזם חח"ע $\alpha:\mathbb{S}_3\to D_4$. נגדיר $\beta:D_4\to\mathbb{Z}_2$ הומומורפיזם על של חבורות על ידי זה שכל סבוב הולך ל-0 וכל שקוף ל-1, וזהו אכן הומומורפיזם.

תשובה 6.

מקרה א לחבורה יש אבר מסדר 9 ולכן היא ציקלית ואיזומורפית ל $\mathbb{Z}_9$ ולכן האיברים 1,2,4,5,7,8 הם מסדר 9, האיברים 3,6 מסדר 3 ו0 הוא אבר מסדר 1.

מקרה ב לחבורה אין אבר מסדר 9, ולכן רק מסדר 3. יש אבר יחידה יחיד מסדר 1, ולכן צריכים להיות 8 איברים מסדר 3.

לא יתכן שאין איברים מסדר 3, אז כל איברי החבורה מסדר 1,כולם איברי יחידה וזו סתירה.

תשובה 7

נביט בחבורה $\mathbb{Z}_{12}$, ובחבורות החלקיות א. $\{0\}$ אשר איזומורפית ל $\mathbb{Z}_1$. ב. $\{0,6\}$ אשר איזומורפית ל $\mathbb{Z}_2$. ג. $\{0,4,8\}$ אשר איזומורפית ל $\mathbb{Z}_3$. ד. $\{0,3,6,9\}$ אשר איזומורפית ל $\mathbb{Z}_4$. ה. $\{0,2,4,6,8,10\}$ אשר איזומורפית ל $\mathbb{Z}_6$.

תשובה 8

$$A=\begin{pmatrix}0 & \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & i\end{pmatrix}, A^2=\begin{pmatrix}\frac{-1+\sqrt{3}i}{2} & 0 & 0\\ 0 & \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}, A^6=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}, A^{12}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$A^{12}=I, o(A)=1,2,3,4,6$

$$A^2=\begin{pmatrix}\frac{-1+\sqrt{3}i}{2} & 0 & 0\\ 0 & \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}, A^3=\begin{pmatrix}0 & \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} & 0\\ \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & -i\end{pmatrix}, A^4=\begin{pmatrix}\frac{-1-\sqrt{3}i}{2} & 0 & 0\\ 0 & \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

לכן הסדר של A הוא 12.

א. מכיון ש f שולחת איבר מסדר 12 לאבר מסדר 12, היא מגדירה איזומורפיזם של חבורות ציקליות מאותו סדר.

ב. האיברים $A^{12}=I$, $A^6=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ הם היחידים שתמונתם היא מטריצה הפיכה ממשית, ולכן

התמונה ההפוכה היא הקבוצה $\{0,6\}$ שהיא ח"ח של $\mathbb{Z}_{12}$., אשר איזומורפית ל $\mathbb{Z}_2$,.

תשובה 9

$G=\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_3$

א.

$$(0,1)^3=(0,0), o(0,1)=3, (0,2)^3=(0,2), o(0,2)=3,$$
$$(1,0)^4=(0,0), o(1,0)=4, (1,1)^{12}=(0,0), o(1,1)=12, (1,2)^{12}=(0,0), o(1,2)=12.$$
$$(2,0)^2=(0,0), o(2,0)=2, (2,1)^6=(0,0), (2,2)^6=(0,0), o(2,2)=6$$
$$(3,0)^4=(0,0), o(3,0)=4, (3,1)^{12}=(0,0), o(3,1)=12, (3,2)^{12}=(0,0), o(3,2)=12.$$

ב. כיון שיש איברים מסדר 12 בחבורה בת 12 איברים לכן החבורה איזומורפית ל $\mathbb{Z}_{12}$ ולכן יש איזומורפיזם $\mathbb{Z}_{12}\cong\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_3$. לכן כל ח"ח של החבורה הציקלית גם היא ציקלית.

תשובה 10

נחשב את f ואת g בצורה מפורשת. עבור f:

0	1	2	3	4	5	6
3/5	4/4	5/3	6/2	7/1	8/0	9/(−1)
3/5	1	5/3	3	0	?	5
2	1	4	3	0	?	5

ולכןנקבל את f על ידי:

$f\downarrow$	0	1	2	3	4	5	6
	2	1	4	3	0	6	5

ובצורה דומה עבור g

0	1	2	3	4	5	6
3/4	5/3	7/2	9/1	11/0	13/(−1)	15/(−2)
3/4	5/3	7/2	2	?	1	3
6	4	0	2	?	1	3

ולכןנקבל את g על ידי:

$g\downarrow$	0	1	2	3	4	5	6
	6	4	0	2	5	1	3

וגם את g^2:

x	0	1	2	3	4	5	6
$g(x)$	6	4	0	2	5	1	3
$g^2(x)$	3	5	6	0	1	4	2

וכעת נחשב את ההפוכים:

$f\downarrow$	0	1	2	3	4	5	6
	2	1	4	3	0	6	5
$f^{-1}\downarrow$	0	1	2	3	4	5	6
	4	1	0	3	2	6	5

x	0	1	2	3	4	5	6
$g(x)$	6	4	0	2	5	1	3
$g^2(x)$	3	5	6	0	1	4	2
$g^{-2}(x)$	3	4	6	0	5	1	2

ולבסוף נקבל את ההרכבה:

x	0	1	2	3	4	5	6
$g^{-2}(x)$	3	5	6	0	1	4	2
$f^{-1}(x)$	4	1	0	3	2	6	5
$f^{-1}g^{-2}(x)$	3	6	5	4	1	2	0

העתקה זו היא מהצורה $(03416)(25)$ ובעלת סדר 10, ונקבל אותה כמכפלת חלופים: $(03)(04)(01)(06)(25)$.

תשובה 11

$$x^3+x^2+x-4=x^3+x^2+x+1$$
$$x^4+4x+3=(x^3+x^2+x+1)(x+4)+(4x+4)$$
$$(x^3+x^2+x+1)=(4x+4)(4x^3+4), \mathrm{gcd}=4x+4.$$

$$4x+4=(x^4+4x+3)-(x^3+x^2+x+1)(x+4)$$