המכללה האקדמית נתניה ע"ר
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

NETANYA ACADEMIC COLLEGE (R"S)
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

<u>מבחן סוף במבנים אלגבריים למדעי המחשב-סמסטר סתו תשע"ה.</u>

<u>מועד ב יום ד,כו ניסן התשע"ה 15-4-2015</u>

- מורה: גיורא דולה, מתרגל: רענן שכטר.
- משך המבחן הוא שלש שעות.
- אפשר להשתמש רק במחשבון ובדפי העזר המצורפים.
- יש לכתוב במחברת תשובה מלאה על כל אחת מהשאלות.
- במבחן יש שלשה חלקים. בחלק א חמש שאלות מתוכן יש לבחור 4 ומשקל כל שאלה 10 נקודות. בחלק ב יש 4 שאלות ומתוכן יש לבחור 3. משקל כל שאלה בחלק ב 15 נקודות. בחלק ג שתי שאלות מתוכן יש לבחור אחת ומשקל כל שאלה 15 נקודות ס"הכ 3*15+4*10+1*15=100
- בכל שאלה יש לנמק ולפרט ובשאלות 'הוכחה' בחלק השני יש להקפיד גם על נסוח טענות עזר.

בהצלחה.

חלק א

שאלה 1

נביט ב 8 הנקודות $(\pm 1, \pm 1, \pm 3)$ ב $\mathbb{R}^3$. הנקודות הן קדקדים של תבה בעלת בסיס רבוע. הגדר את G כאוסף כל ההעתקות שומרות המרחק החד חד ערכיות (חח״ע) ועל של התבה לעצמה עם פעולת הרכבת העתקות.

א. רשום את כל איברי G.

ב. חשב את הסדר של כל אבר ב-G.

ג. כמה הומומורפיזמים חח״ע ישנם $f:\mathbb{S}_3 \to G$? רשום אותם.

ד. כמה הומומורפיזמים חח״ע ישנם $f:\mathbb{S}_2 \to G$? רשום אותם.

שאלה 2

שתי תמורות על הקבוצה $\mathbb{Z}_7 = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ מוגדרות על ידי הנוסחאות הבאות (הפעולות מבוצעות ב $\mathbb{Z}_7$).

$$f = \begin{cases} \dfrac{x+3}{6-4x} & 5 \neq x \in \mathbb{Z}_7 \\ a & 5 = x \in \mathbb{Z}_7 \end{cases}, \quad g = \begin{cases} \dfrac{2x+3}{5-4x} & 3 \neq x \in \mathbb{Z}_7 \\ b & 3 = x \in \mathbb{Z}_7 \end{cases}$$

א. מצא את a ואת b.
ב. חשב את $f^{-1}g^{-2}$.
ג. פרק את $f^{-1}g^{-2}$. למכפלה של מחזורים זרים.
ד. פרק את $f^{-1}g^{-2}$. למכפלה של חילופים.
ה. מצא את הסדר של $f^{-1}g^{-2}$.

שאלה 3

חשב את המחלק המשותף $d(x)$ הגדול ביותר של הפולינומים הבאים:
$a(x) = x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 6 \in \mathbb{Z}_7[x], \quad b(x) = x^3 + 6x^2 + 3x + 5 \in \mathbb{Z}_7[x]$. מצא פולינומים $u(x), v(x) \in \mathbb{Z}_7[x]$ המקיימים $d(x) = \gcd(a(x), b(x)) = a(x)u(x) + b(x)v(x)$.

שאלה 4

נתונים חבורה G וחבורה חלקית שלה H≤G, ונגדיר את C(H) על ידי $C(H)=\{g\in G\,|\,\exists h\in H, gh=hg\}$. ענה לסעיפים הבאים ונמק את צעדיך

א. C(H) חבורה חלקית של G.

ב. האם תמיד H≤C(H). אם כן הוכח אם לא תן דוגמא נגדית.

ג. האם תמיד C(H)≤H. אם כן הוכח אם לא תן דוגמא נגדית.

ד. האם תמיד C(H)={e}. אם כן הוכח אם לא תן דוגמא נגדית.

.

שאלה 5

הבט במטריצה $A=\begin{pmatrix}0 & i\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ שהיא אבר ב $\mathbb{GL}(\mathbb{C},2)$ (עם פעולת כפל מטריצות) א. . מצא את הסדר שלה וסמן אותו n.

א. נגדיר העתקה $f:\mathbb{Z}_n\to\mathbb{GL}(\mathbb{C},2)$ (כאשר ב $\mathbb{Z}_n$ ישנה פעולת החבור מודולו n) על ידי $f(1)=\begin{pmatrix}0 & i\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ . . ועל ידי תכונות ההומומורפיזם.

ב. כתוב את f בצורה מפורשת.

ג. מצא את התמונה ההפוכה של החבורה החלקית $f:\mathbb{Z}_n\to\mathbb{GL}(\mathbb{R},2)$

<u>חלק ב</u>

שאלה 6

אם F שדה ו $f(x),g(x)\in F[x]$ שני פולינומים כלשהם , $g(x)\neq 0(x)$, אז קיימים שני פולינומים יחידים $q(x),r(x)\in F[x]$ כך ש :

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x), 0\le\deg(r(x))<\deg(g(x))$$

שאלה 7

הוכח את המשפט כי אם S שדה, ונתונים $p(x),q(x)\in S[x]$, אז קיימים פולינומים $a(x),b(x)\in S[x]$ כך שמתקיים $\gcd(p(x),q(x))=p(x)a(x)+q(x)b(x)$.

שאלה 8

הוכח את המשפט:

יהי $f:G\to H$ הומומורפיזם של חבורות. אז

א. $f(e_G)=e_H$.

ב. $\forall g\in G \quad f(g^{-1})=(f(g))^{-1}$.

ג. $\forall g\in G \quad \forall n\in \mathbf{Z} \quad f(g^n)=(f(g))^n$.

שאלה 9

הוכח כי לכל חבורה G וחבורה חלקית H מתקיים

א*. $\forall g \quad g\in g*H$

ב*. $\forall g,k\in G, k\in g*H \to k*H\subseteq g*H$.

ג*. $\forall g,k\in G, k\in g*H \to k*H=g*H$.

ד*. $\forall g,k\in G,\ [(g*H\cap k*H\neq\emptyset)\to(g*H=k*H)]$.

ה*. $\mathrm{a_g}:\mathrm{H}\to g*H \quad \forall g$ היא פונקציה חד חד ערכית ועל.

ו*. $G=\bigcup_{g\in G} g*H$.

<u>חלק ג</u>

שאלה 10

לכל מספר ממשי $a\in\mathbb{R}$, נגדיר $A(a)\in\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ על ידי $A(a)=\begin{pmatrix}\cos(2a) & \sin(2a)\\ \sin(2a) & -\cos(2a)\end{pmatrix}$

א. בדוק כי לכל $a\in\mathbb{R}$ מתקיים $A(a)\in\mathbb{GL}_2(\mathbb{R})$

ב. חשב את הסדר של $A(a)$

ג. לכל $a,b\in\mathbb{R}$ חשב את $A(a,b)=A(a)A(b)$

ד. לכל $a,b\in\mathbb{R}$ חשב את $A(a,b)^2$

ה. תן דוגמא לחבורה G, ושני איברים בחבורה בעלי סדר סופי שמכפלתם היא אבר מסדר אינסופי.

שאלה 11

יהי $f: G \to H$ הומומורפיזם של חבורות: ותהי K חבורה חלקית (ח"ח) של H. הבט על $L = f(f^{-1}(K))$.

א. האם זו ח"ח?

ב. של איזו חבורה?.

ג. האם תמיד L מוכלת ב K? הוכח או תן דוגמא נגדית.

ד. האם תמיד K מוכלת ב L? הוכח או תן דוגמא נגדית.

ה. מה יחס ההכלה בין K וL כאשר f חד חד ערכית?

ו. מה מה יחס ההכלה בין K וL כאשר f על?

<u>בהצלחה</u>

תשובות:

תשובה 1

ברור כי כל העתקה חח״ע ועל ששומרת על המרחק צריכה לשלוח כל קדקד לקדקד אחר. כל העתקה כזו מעבירה את הקדקד הרבוע לעצמו או לרבוע השני ואוסף כל ההעתקות של הרבוע לעצמו היא החבורה $\mathbb{D}_4$ בת 8 האיברים הבאים:

$$I:(x,y)\to(x,y), o(I)=1, s:(x,y)\to(y,-x), o(s)=4, -xy:(x,y)\to(-x,-y), o(-xy)=2,$$
$$ns:(x,y)\to(-y,x), o(ns)=4, -x:(x,y)\to(-x,y), o(-x)=2, -s:(x,y)\to(y,x), o(-s)=2,$$
$$-y:(x,y)\to(x,-y), o(-y)=2, -ns:(x,y)\to(-y,-x), o(-ns)=2.$$

. ברור כי רכיב z חיב ללכת ל $\pm$ עצמו ולכן $G=\mathbb{D}_4\times\mathbb{Z}_2$ ויש ב G 16 איברים, 8 אפשרויות לאבר מהרכיב הראשון ו2 מהרכיב השני. ב $\mathbb{Z}_2$ האבר 0 הוא בעל סדר 1 ולכן ,

$$o(I,0)=1, o(s,0)=4, o(-xy,0)=2, o(ns,0)=4, o(-x,0)=2, o(-s,0)=2, o(-y,0)=2, o(-ns,0)=2.$$

האבר 1 הוא בעל סדר 2 ולכן ,

$$o(I,1)=2, o(s,1)=4, o(-xy,1)=2, o(ns,1)=4, o(-x,1)=2, o(-s,1)=2, o(-y,1)=2, o(-ns,1)=2.$$

ל לכן לא יתכן הומומורפיזם חח״ע $f:\mathbb{S}_3\to G$ כי כל אחד כזה שומר על סדר של כל אבר מהתחום, בתחום יש אברים בעלי סדר 3, ב G יש איברים רק בעלי סדר 2 . יתכנו הומומורפיזמים חח״ע $f:\mathbb{S}_2\to G$ כיון שגם בתחום וגם בטוח יש אברים בעלי סדר 2 ו-1 בלבד, ולכן האבר היחיד של $\mathbb{S}_2=\mathbb{Z}_2$ שהוא בעל סדר 2 , יכול ללכת ל-11 איברים שונים בG שהם בעלי סדר 2, ולכן יש 11 הומומורפיזמים חח״ע $f:\mathbb{S}_2\to G$.

תשובה 2

נחשב את f ואת g בצורה מפורשת. עבור f :

$$f=\begin{cases}\frac{x+3}{6-4x} & 5\neq x\in\mathbb{Z}_7\\ a & 5=x\in\mathbb{Z}_7\end{cases},\ g=\begin{cases}\frac{2x+3}{5-4x} & 3\neq x\in\mathbb{Z}_7\\ b & 3=x\in\mathbb{Z}_7\end{cases}$$

ולכן נקבל את f על ידי :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 3/6 & 4/2 & 5/(-2) & 6/(-6) & 7/(-10) & 8/(-14) & 9/(-18)\\ 3\cdot 6 & 4\cdot 4 & 5/5 & 6/1 & 0/-3 & 1/0 & 2/3\\ 4 & 2 & 1 & 6 & 0 & ? & 3\end{array}$$

$$f\downarrow\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 4 & 2 & 1 & 6 & 0 & 5 & 3\end{array}$$

ובצורה דומה עבור עבור g

$$\frac{2x+3}{5-4x}$$

ולכן נקבל את g על ידי :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 3/5 & 5/1 & 7/(-3) & 9/(-7) & 11/(-11) & 13/(-15) & 15/(-19)\\ 3\cdot 3 & 5 & 0/4 & 2/0 & 4/-4 & 6/6 & 1/2\\ 2 & 5 & 0 & ? & 6 & 1 & 4\end{array}$$

$$g\downarrow\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 2 & 5 & 0 & 3 & 6 & 1 & 4\end{array}$$

וגם את g^2 :

$$\begin{array}{cccccccc} x & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ g(x) & 2 & 5 & 0 & 3 & 6 & 1 & 4\\ g^2(x) & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\end{array}$$

כלומר $g^2=I$ ולכן $g^{-2}=I$ וכעת נחשב את ההפוכה :

$$f\downarrow\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 4 & 2 & 1 & 6 & 0 & 5 & 3\end{array}$$

$$f^{-1}=f\downarrow\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 4 & 2 & 1 & 6 & 0 & 5 & 3\end{array}$$

ובצורה $f^{-1}g^{-2}(x)=f^{-1}=f$ **ו**היא מהצורה (04)(12)(36) בעלת סדר 2 וכבר נתונה כמכפלת חלופים.

תשובה 3

$a(x)=x^4+3x^3+5x^2+6\in\mathbb{Z}_7[x],\quad b(x)=x^3+6x^2+3x+5\in\mathbb{Z}_7[x]$

$x^4+3x^3+5x^2+6=(x^3+6x^2+3x+5)(x+4)+(6x^2+4x)$

$(x^3+6x^2+3x+5)=(6x+4)(6x^2+4x)+(x+5)$

$(6x^2+4x)=(x+5)(6x+2)+4, \mathrm{gcd}=4.$

$$4=(6x^2+4x)-(x+5)(6x+2)=(6x^2+4x)-[(x^3+6x^2+3x+5)-(6x+4)(6x^2+4x)](6x+2)=$$
$$(6x^2+4x)[1-(6x+4)(6x+2)]-(6x+2)(x^3+6x^2+3x+5)=$$
$$=[x^4+3x^3+5x^2+6-(x^3+6x^2+3x+5)(x+4)][1-(6x+4)(6x+2)]-(6x+2)(x^3+6x^2+3x+5)=$$
$$=(x^4+3x^3+5x^2+6)[1-(6x+4)(6x+2)]-(x^3+6x^2+3x+5)\{(x+4)][1-(6x+4)(6x+2)]+(6x+2)\}$$

תשובה 4

נשים לב כי $e\in H$ ולכן $\forall g\in G, eg=ge$ ולכן לפי ההגדרה C(H)=G. לכן נובעות כל התשובות לשאלות בסעיפים. א. ברור כי C(H)=G ח"ח של G. ב. ברור כי H≤C(H)=G. ג. G=C(H)≤H רק אם H=G. ד. ברור כי C(H)=G={e} רק אם G=e.

תשובה 5

$$A=\begin{pmatrix}0 & i\\ -1 & 0\end{pmatrix}, A^2=\begin{pmatrix}-i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}, (-i)^4=1, (A^2)^4=I, o(A)=1,2,4,8,$$
$$A^4=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

לכן הסדר של A הוא 8.

א. מכיון ש f שולחת איבר מסדר 8 לאבר מסדר 8, היא מגדירה איזומורפיזם של חבורות ציקליות מאותו סדר.

ב. האיברים $A^4=-I, A^8=I$ הם היחידים שתמונתם היא מטריצה הפיכה ממשית, ולכן התמונה ההפוכה היא הקבוצה $\{0,4\}$ שהיא ח"ח של $\mathbb{Z}_8$.,

תשובה 10

א.

$$\det(A(a)) = -\cos^2(2a) - \sin^2(2a) = -1$$

ב.

$$A(a)^2 = \begin{pmatrix} \cos(2a) & \sin(2a) \\ \sin(2a) & -\cos(2a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(2a) & \sin(2a) \\ \sin(2a) & -\cos(2a) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos(2a)^2 + \sin(2a)^2 & \cos(2a)\sin(2a) - \cos(2a)\sin(2a) \\ \cos(2a)\sin(2a) - \cos(2a)\sin(2a) & \cos(2a)^2 + \sin(2a)^2 \end{pmatrix} = I, o(A(a)) = 2.$$

ג.

$$A(a,b) = A(a)A(b) = \begin{pmatrix} \cos(2a) & \sin(2a) \\ \sin(2a) & -\cos(2a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(2b) & \sin(2b) \\ \sin(2b) & -\cos(2b) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos(2a)\cos(2b) + \sin(2a)\sin(2b) & -(\cos(2b)\sin(2a) - \cos(2a)\sin(2b)) \\ \cos(2b)\sin(2a) - \cos(2a)\sin(2b) & \cos(2a)\cos(2b) + \sin(2a)\sin(2b) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(2a)\cos(2b) + \sin(2a)\sin(2b) & -(\cos(2b)\sin(2a) - \cos(2a)\sin(2b)) \\ \cos(2b)\sin(2a) - \cos(2a)\sin(2b) & \cos(2a)\cos(2b) + \sin(2a)\sin(2b) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(2(a-b)) & \sin(2(a-b)) \\ -\sin(2(a-b)) & \cos(2(a-b)) \end{pmatrix}$$

ד.

$$(A(a,b))^2 = \begin{pmatrix} \cos(2(a-b)) & \sin(2(a-b)) \\ -\sin(2(a-b)) & \cos(2(a-b)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(2(a-b)) & \sin(2(a-b)) \\ -\sin(2(a-b)) & \cos(2(a-b)) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2(2(a-b)) - \sin^2(2(a-b)) & 2\sin(2(a-b))\cos(2(a-b)) \\ -2\sin(2(a-b))\cos(2(a-b)) & \cos^2(2(a-b)) - \sin^2(2(a-b)) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(4(a-b)) & \sin(4(a-b)) \\ -\sin(4(a-b)) & \cos(4(a-b)) \end{pmatrix} = A(2a, 2b)$$

כדי שחזקה מסוימת של A(a,b) תהיה הזהות, על a-b להיות כפולה רציונלית של המספר 2π כל מספר שאיננו כזה, בבכל חזקה, לעולם לא ישוה ל 2π. למשל אם a-b הוא רדיאן אחד, לעולם כל חזקה של A(a,b) לא תהיה הזהות.

תשובה 11

א. ב. לפי משפט שהוכחנו $M = f^{-1}(K)$ היא ח״ח של G ו $L = f(M)$ ח״ח של H.

ג לפי ההגדרה כל אבר של $f^{-1}(K)$ מקיים כי תמונתו היא ב K,

ולכן תמיד יש הכלה $L \subseteq K$.

ד. לא תמיד K מוכלת ב L. נבחר . $f:\mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6,\ f(x)=2x, K=\{0,3\}$,.. אז מתקיים

ו $M = f^{-1}(K)=\{0\}, L = f(\{0\})=\{0\}$ ובמקרה זה K לא מוכלת ב L.

א. הכלה אחת תמיד קימת לפי סעיף ג, וההכלה שמדובר בה בסעיף ד לא קיימת גם עבור f ח״חע כי שמראה הדוגמא הבאה

$f:\mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_{12},\ f(x)=2x, K=\{0,3\}$ היא חח״ע ועדיין ו

$M = f^{-1}(K)=\{0\}, L = f(\{0\})=\{0\}$ ועדיין זה K לא מוכלת ב L.

ב. אם f על אז לכל אבר x מאיברי K יש תמונה הפוכה ב M, ואז $f(f^{-1}(x))=x$. לכן קים שויון K=L.