המכללה האקדמית נתניה ע"ר
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

NETANYA ACADEMIC COLLEGE (R"S)
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

מבחן סוף במבנים אלגבריים למדעי המחשב-סמסטר קיץ ה'תשע"ח.

מועד ב יום ב כ חשון התשע"ט 29-10-2018

- מורה: גיורא דולה, מתרגל: רענן שכטר.
- משך המבחן הוא שלש שעות.
- אפשר להשתמש רק במחשבון ובדפי העזר המצורפים.
- יש לכתוב במחברת תשובה מלאה עבור כל אחת מהשאלות.
- במבחן יש ארבעה חלקים. בחלק א שתי שאלות ומשקל כל שאלה 10 נקודות. בחלק ב יש 2 שאלות ומשקל כל שאלה 15 נקודות. אפשר לענות על כמה שאלות שרותים מחלקים א ו ב. בחלק ג יש 4 שאלות ומשקל כל שאלה 15 נקודות. ומתוכן יש לבחור 3. בחלק ד יש שאלה אחת ומשקלה 5 נקודות.
- 2*10+2*15+3*15+1*5=100

- מותר להסתמך על כל טענה שהוכחה בכתה אך יש לנסח אותה במדויק בנפרד.

בהצלחה.

<u>חלק א</u>

שאלה 1

שתי תמורות על הקבוצה $\mathbb{Z}_7=\{0,1,2,3,4,5,6\}$ מוגדרות על ידי הנוסחאות הבאות (הפעולות מבוצעות ב $\mathbb{Z}_7$).

$$f=\begin{cases}\frac{1}{x}-2 & 0\neq x\in\mathbb{Z}_7\\ a & 0=x\in\mathbb{Z}_7\end{cases},\ g=(1,2,6)(5,4,3)$$

א. מצא את a .
ב. חשב את f^2g^{-1} .
ג. פרק את f^2g^{-1} . למכפלה של מחזורים זרים.
ד. פרק את f^2g^{-1} . למכפלה של חילופים.
ה. מצא את הסדר של f^2g^{-1} .

שאלה 2

חשב את המחלק המשותף $d(x)$ הגדול ביותר של הפולינומים הבאים:
$a(x)=x^4+x^2+1\in\mathbb{Z}_5[x],\ \ b(x)=x^3+1\in\mathbb{Z}_5[x]$. מצא פולינומים $u(x),v(x)\in\mathbb{Z}_5[x]$ המקיימים $\mathrm{d(x)=gcd}(a(x),b(x))=a(x)u(x)+b(x)v(x)$.

<u>חלק ב</u>

שאלה 3

נביט בשתי המטריצות הבאות:

$$S=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},T=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

א. חשב את הסדרים של כל האיברים מהצורה $\left\{S^iT^j, 0 \le i,j\right\}$

ב. מצא שתי ח"ח שונות של $\left\{S^iT^j, 0 \le i,j\right\}$ אשר כל אחת איזומורפית

ל $\mathbb{Z}_6$.

שאלה 4

נתונה החבורה $G = (\mathbb{Z}_{48}^*, \cdot)$. (כל האיברים ההפיכים עם פעולת הכפל).

א רשום את כל האיברים ב G.

ב . חשב את 5^{122} ב-G.

ג. מצא את כל הסדרים של אברי החבורה.

ד. מצא ב G שלוש תת חבורות שונות בנות ארבעה איברים.

חלק ג

שאלה 5

הוכח משפט קיום ויחידות חלוקת פולינומים בחוג הפולינומים $S[x]$.

עבור שדה S.

שאלה 6

יהי $f: G \to H$ הומומורפיזם של חבורות : הוכח

א. תהי $K \le G$ חבורה חלקית אז $f(K) \le H$ חבורה חלקית.

ב. תהי $L \le H$ חבורה חלקית אז $f^{-1}(L) \le G$ חבורה חלקית.

ג. f חח"ע אם ורק אם Ker(f)={e}

.

שאלה 7

נסח והוכח את התנאי המקוצר עבור ח"ח.

שאלה 8

הוכח בחוג הפולינומים $S[x]$. עבור שדה S., לכל שני פולינומים $p(x),q(x)$ קימים פולינומים $a(x),b(x)$ כך שמתקים השויון

$$a(x)p(x)+b(x)q(x)=\gcd(p(x),q(x))$$

חלק ד

שאלה 9

מצא הומומורפיזם חח"ע $f:\mathbb{S}_3\to GL(3,\mathbb{Z})$

בהצלחה

תשובה 1

נחשב את f ואת g בצורה מפורשת. עבור f :

0	1	2	3	4	5	6
$1/0-2$	$1/1-2$	$1/2-2$	$1/3-2$	$1/4-2$	$1/5-2$	$1/6-2$
a	6	2	3	0	1	4
5	6	2	3	0	1	4

ולכן נקבל את f וגם את f^2

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	5	6	2	3	0	1	4
$f^2(x)$	1	4	2	3	5	6	0

ונקבל את g על ידי :

$$g\downarrow\begin{matrix}0&1&2&3&4&5&6\\0&2&6&5&3&4&1\end{matrix}$$

וגם את g^{-1} :

$$g\downarrow\begin{matrix}0&1&2&3&4&5&6\\0&2&6&5&3&4&1\end{matrix}$$

$$g^{-1}\downarrow\begin{matrix}0&1&2&3&4&5&6\\0&6&1&4&5&3&2\end{matrix}$$

וכעת נחשב את ההרכבה :

x	0	1	2	3	4	5	6
$g^{-1}(x)$	0	6	1	4	5	3	2
$f^2(x)$	1	4	2	3	5	6	0
$f^2g^{-1}(x)$	1	0	4	5	6	3	2

העתקה זו היא מהצורה (01)(246)(35)

ובעלת סדר 10, ונקבל אותה כמכפלת חלופים : (01)(24)(26)(35)

תשובה 2

$$a(x) = x^4 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_5[x], \quad b(x) = x^3 + 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$$
$$x^4 + x^2 + 1 = (x^3 + 1)x + (x^2 + 4x + 1)$$
$$(x^3 + 1) = (x^2 + 4x + 1)(x + 1) + 0.$$
$$\text{gcd} = x^2 + 4x + 1$$

$$\text{gcd} = x^2 + 4x + 1 = x^4 + x^2 + 1 - (x^3 + 1)x = a(x) - xb(x)$$

תשובה 3

$$S=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},T=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},S^1=S,S^2=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix},S^3=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},S^4=I_3,T^1=T,$$

$$T^2=I,ST=\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},(ST)^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&-1\\-1&0&0\end{pmatrix},(ST)^3=-I,o(ST)=6.$$

$$S^2T=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix},(S^2T)^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},o(S^2T)=4,$$

$$S^3T=\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},(S^3T)^2=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\1&0&0\end{pmatrix},(S^3T)^3=-I,o(S^3T)=6,$$

$$o(S)=0(S^3)=4,o(S^2)=o(T)=2,o(I)=1$$

סעיף ב החי"ח הנוצרת על ידי .כל אחד מהאיברים ST,S^3T

תשובה 4

קודם כל נחשב את כל האיברים שיש להם מממ (gcd) 1 עם 48 והללו הם
$1,5,7,11,13,17,19,23,25,29,31,35,37,41,43,47$ כלומר החבורה הזו היא בת 16 איברים.
כעת נחשב את הסדר של כל האיברים:

$1,5,7,11,13,17,19,23,25,29,31,35,37,41,43,47$

$o(1)=1,$

$5^2=25, 5^3=125=29, 5^4=29\cdot 5=145=1, o(5)=4$

$7^2=49=1, o(7)=1$

$11^2=121=25, 11^3=25\cdot 11=275=35, 11^4=35\cdot 11=385=1, o(11)=4$

$13^2=169=25, 13^3=25\cdot 13=325=37, 13^4=37\cdot 13=481=1, o(13)=4$

$17^2=289=1, o(17)=2$

$19^2=361=25, 19^3=25\cdot 19=475=43, 19^4=43\cdot 19=817=1, o(19)=4$

$23^2=529=1, o(23)=2$

$25^2=625=1, o(25)=2$

$29^2=841=25, 29^3=25\cdot 29=725=5, 29^4=5\cdot 29=145=1, o(29)=4$

$31^2=961=1, o(31)=2$

$35^2=1225=25, 35^3=25\cdot 35=875=11, 35^4=35\cdot 11=385=1, o(35)=4$

$37^2=1369=25, 37^3=25\cdot 37=925=13, 37^4=13\cdot 37=481=1, o(37)=4$

$41^2=1681=1, o(41)=2$

$43^2=1849=25, 43^3=25\cdot 43=1075=19, 43^4=43\cdot 19=817=1, o(43)=4$

$47^2=2029=1, o(47)=2$

$5^{122}=5^{4\cdot 30+2}=(5^4)^{30}5^2=(1)^{30}5^2=1\cdot 25=25$

$H=\{5,25,29,1\}, H=\{11,25,35,1\}, H=\{13,25,37,1\}, H=\{19,25,43,1\}$

תשובה 9

א. נשים לב כי על ידי האיברים $R, A\in\mathbb{S}_3$, ניתן לבטא את שאר איברי $\mathbb{S}_3$, כיון שמתקיים $R^2=L, R^3=I, RA=B, R^2A=C, R^3A=A$ כלומר. $\mathbb{S}_3=\{R^iA^j, 0\le i,j, R^3=A^2=I\}$ כמו כן נשים לב כי מתקיים היחס $RA=AR^2=B$. לכן מספיק שנעתיק את R לאיבר מסדר 3 ואת A לאיבר מסדר 2 ב $GL(3,\mathbb{Z})$, והללו יקימו את הקשר $f(R)f(A)=f(A)f(R)^2$. יש כמה איברים כאלו ונבחר

$$S=f(A)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}, T=f(R)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}, S^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, T^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, T^3=I,$$

$$TS=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=ST^2$$