המכללה האקדמית נתניה ע"ר
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

NETANYA ACADEMIC COLLEGE (R"S)
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

מבחן סוף במבנים אלגבריים למדעי המחשב-סמסטר קיץ ה'תשע"ז.

יום ד יא מועד ב כסלו התשע"ח 29-11-2017

- מורה: גיורא דולה, מתרגל: רענן שכטר.
- משך המבחן הוא שלש שעות.
- אפשר להשתמש רק במחשבון ובדפי העזר המצורפים.
- יש לכתוב במחברת תשובה מלאה על כל אחת מהשאלות.
- במבחן יש שלשה חלקים. בחלק א חמש שאלות מתוכן יש לבחור 4 ומשקל כל שאלה 10 נקודות. בחלק ב יש 4 שאלות ומתוכן יש לבחור 3. משקל כל שאלה בחלק ב 15 נקודות. בחלק ג שתי שאלות מתוכן יש לבחור אחת ומשקל כל שאלה 15 נקודות ס"הכ $3*15+4*10+1*15=100$
- מותר להסתמך על כל טענה שהוכחה בכתה אך יש לנסח אותה במדויק בנפרד.

בהצלחה.

עמותה רשומה 580242451 **Fax:** (972-9) 8844439 **:פקס** **Tel:** (972-9) 8607777 **:טל**

חלק א

שאלה 1

נביט בשתי המטריצות הבאות:

$$S=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & -1\end{pmatrix}, T=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

א. חשב את הקבוצה $G=\left\{S^iT^j, 0\le i,j\right\}$.

ב. חשב את הסדר של כל איבר ב-G.

ג. מצא את כל החבורות החלקיות של G.

ד. האם G אבלית?

ה. מצא חבורה אחרת אשר G איזומורפית אליה.

שאלה 2

שתי תמורות על הקבוצה $\mathbb{Z}_7=\{0,1,2,3,4,5,6\}$ מוגדרות על ידי הנוסחאות הבאות (הפעולות מבוצעות ב $\mathbb{Z}_7$).

$$f=\begin{cases}\dfrac{x+4}{5-5x} & 1\neq x\in\mathbb{Z}_7\\ a & 1=x\in\mathbb{Z}_7\end{cases}, g=\begin{cases}\dfrac{2x+6}{4-5x} & 5\neq x\in\mathbb{Z}_7\\ b & 5=x\in\mathbb{Z}_7\end{cases}$$

א. מצא את a ואת b.

ב. חשב את $f^{-1}g^{-2}$.

ג. פרק את $f^{-1}g^{-2}$. למכפלה של מחזורים זרים.

ד. פרק את $f^{-1}g^{-2}$. למכפלה של חילופים.

ה. מצא את הסדר של $f^{-1}g^{-2}$.

שאלה 3

חשב את המחלק המשותף $d(x)$ הגדול ביותר של הפולינומים הבאים:

$a(x)=x^4+3x^3+3x^2+3x+3\in\mathbb{Z}_7[x],\ \ b(x)=x^3+5x^2+2\in\mathbb{Z}_7[x]$. מצא פולינומים $u(x),v(x)\in\mathbb{Z}_7[x]$ המקיימים $\mathrm{d(x)=gcd}(a(x),b(x))=a(x)u(x)+b(x)v(x)$.

שאלה 4

תהינה $G=(\mathbb{Z}_4,\oplus_4)$ $H=(\mathbb{Z}_3,\oplus_3)$ שתיהן עם פעולת החיבור מודולו, ונגדיר על הקבוצה $G\times H$ פעולה בינרית על ידי

$$\forall(g,h),(a,b)\in G\times H,(g,h)(a,b)=(g\oplus_4 a,h\oplus_3 b)$$

א. מצא את כל הסדרים של כל האיברים בחבורה.

ב. מצא את כל החבורות החלקיות של $G\times H$.

שאלה 5

נתונה החבורה $(\mathbb{Z}_{16}^*,\cdot)$. (כל האיברים ההפיכים עם פעולת הכפל).

א חשב את הסדר של כל האיברים ב G.

ב . חשב את 11^{137} ב-$(\mathbb{Z}_{16}^*,\cdot)$.

ב. מצא את כל החי"ח של $(\mathbb{Z}_{16}^*,\cdot)$.

ג. האם $(\mathbb{Z}_{16}^*,\cdot)$ ציקלית?

<u>חלק ב</u>

שאלה 6

הוכח משפט קיום ויחידות חלוקת פולינומים בחוג הפולינומים $S[x]$.

עבור שדה S.

שאלה 7

יהי $f:G\to H$ הומומורפיזם של חבורות : הוכח

א. תהי $K\le G$ חבורה חלקית אז $f(K)\le H$ חבורה חלקית.

ב. תהי $L\le H$ חבורה חלקית אז $f^{-1}(L)\le G$ חבורה חלקית.

ג. f חח"ע אם ורק אם Ker(f)={e}

שאלה 8.

יהי $f:G\to H$ הומומורפיזם של חבורות. אז

א. $f(e_G)=e_H$.

ב. $f(g^{-1})=(f(g))^{-1}$ $\forall g\in G$.

ג. $f(g^n)=(f(g))^n$ $\forall n\in \mathbf{Z}$ $\forall g\in G$.

שאלה 9

נתונות חבורה G וח"ח H. אז מתקיים

א*. $\forall g \quad g \in g*H$

ב*. $\forall g,k \in G, k \in g*H \to k*H \subseteq g*H$.

ג*. $\forall g,k \in G, k \in g*H \to k*H = g*H$.

ד*. $\forall g,k \in G,\ [(g*H \cap k*H \neq \varnothing) \to (g*H = k*H)]$.

ה*. $\forall g \quad \mathrm{a_g}:\mathrm{H} \to g*H$ היא פונקציה חח"ע ועל.

ו*. $G = \bigcup_{g \in G} g*H$.

חלק ג

שאלה 10

נתונה חבורה G. נביט על כל איברי החבורה ועל כל אחד נבצע פעולה שלו על עצמו. מתקבלת קבוצה חלקית של G.

$G^2 = \{g^2, g \in G\}$ אשר קרויה קבוצת הרבועים של G.

א. חשב את קבוצת הרבועים של $(\mathbb{Z}_{12},+)$ האם זו ח"ח?

ב. חשב את קבוצת הרבועים של $(\mathbb{S}_3,\circ)$ האם זו ח"ח?

נגדיר את קבוצת חזקות 3 של G על ידי $G^3 = \{g^3, g \in G\}$

ג. חשב את קבוצת חזקות 3 של $(\mathbb{Z}_{12},+)$ האם זו ח"ח?

ד. חשב את קבוצת חזקות 3 של $(\mathbb{S}_3,\circ)$ האם זו ח"ח?

נגדיר את קבוצת חזקות n של G על ידי $G^n = \{g^n, g \in G\}$

ה. עבור אלו n קבוצת חזקות n של החבורות $(\mathbb{Z}_{12},+)$ ו $(\mathbb{S}_3,\circ)$ הן ח"ח?

שאלה 11

נסמן ב $\mathbb{Q}([i])$ את קבוצת המספרים המרוכבים $a+bi$ כך ש a,b הם רציונליים. ונגדיר עליה את פעולות החבור והכפל המושרות מתוך המרוכבים.

א. הוכח כי $\mathbb{Q}([i])$ הוא שדה..
ב. תן דוגמא לפולינום עם מקדמים שלמים אשר הפתרון המרוכב שלו נמצא בקבוצה $\mathbb{R}-\mathbb{Q}([i])$
ג. תן דוגמא לפולינום עם מקדמים שלמים אשר הפתרון המרוכב שלו נמצא בקבוצה $\mathbb{Q}([i])-\mathbb{R}$

<u>בהצלחה</u>

תשובות :

תשובה 1

$$S^1=S=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & -1\end{pmatrix}, S^2=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-2 & -2\sqrt{3}\\ 2\sqrt{3} & -2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{pmatrix}, S^3=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=I_2,$$

$$T^1=T=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, T^2=I_2, ST=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{pmatrix}, S^2T=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & -1\end{pmatrix}, TS=S^2T, TS^2=ST.$$

ולכן G מכילה 6 איברים.

$$o(S)=3, o(S^2)=3, o(T)=2, o(ST)=2, o(S^2T)=2, o(I)=1.$$

כל איבר מסדר 2 מגדיר חבורה חלקית הכוללת אותו ואת איבר היחידה ויש 3 כאלו. שני האיברים מסדר 3 מגדירים חבורה חלקית מחזורית בת 3 איברים. G איננה אבלית למשל מתקיים $TS=S^3T$ G איזומורפית ל $\mathbb{S}_3$.

תשובה 2

נחשב את f ואת g בצורה מפורשת. עבור f :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4/5 & 5/0 & 6/(-5) & 7/(-10) & 8/(-15) & 9/(-20) & 10/(-25) \\ 4/5 & 5/0 & 1/2 & 0/4 & 1/6 & 2/1 & 3/3 \\ 5 & ? & 4 & 0 & 6 & 2 & 1 \end{array}$$

ולכן נקבל את f על ידי :

$$f \downarrow \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 4 & 0 & 6 & 2 & 1 \end{array}$$ ובצורה דומה עבור עבור g

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6/4 & 8/(-1) & 10/(-6) & 12/(-11) & 14/(-16) & 16/(-21) & 18/(-26) \\ 5 & 6 & 3/1 & 5/3 & 0/5 & 2/0 & 4/2 \\ 5 & 6 & 3 & 4 & 0 & ? & 2 \end{array}$$

ולכן נקבל את g

על ידי :

$$g \downarrow \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$ וגם את g^2 :

x	0	1	2	3	4	5	6
$g(x)$	5	6	3	4	0	1	2
$g^2(x)$	1	2	4	0	5	6	3

וכעת נחשב את ההפוכים:

$$f\downarrow\begin{matrix}0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 5 & 3 & 4 & 0 & 6 & 2 & 1\end{matrix}$$

$$f^{-1}\downarrow\begin{matrix}0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 3 & 6 & 5 & 1 & 2 & 0 & 4\end{matrix}$$

x	0	1	2	3	4	5	6
$g(x)$	5	6	3	4	0	1	2
$g^2(x)$	1	2	4	0	5	6	3
$g^{-2}(x)$	3	0	1	6	2	4	5

ולבסוף נקבל את ההרכבה:

x	0	1	2	3	4	5	6
$g^{-2}(x)$	3	0	1	6	2	4	5
$f^{-1}(x)$	3	6	5	1	2	0	4
$f^{-1}g^{-2}(x)$	1	3	6	4	5	2	0

העתקה זו היא מהצורה

(0134526) ובעלת סדר 7, ונקבל אותה כמכפלת חלופים: (06)(02)(05) (04)(03)(01).

תשובה 3

$$x^4+3x^3+3x^2+3x+3=(x^3+5x^2+2)(x+5)+(6x^2+x)$$
$$(x^3+5x^2+2)=(6x+1)(6x^2+x)+(6x+2).$$
$$6x^2+x=(6x+2)(x+1)+5, \mathrm{gcd}=5$$

$$5=(6x^2+x)-(6x+2)(x+1)=$$
$$=(6x^2+x)-[(x^3+5x^2+2)-(6x+1)(6x^2+x)](x+1)=$$
$$=[1-(6x+1)(x+1)](6x^2+x)-(x+1)(x^3+5x^2+2)=$$
$$=[1-(6x+1)(x+1)][(x^4+3x^3+3x^2+3x+3)-(x^3+5x^2+2)(x+5)]-(x+1)(x^3+5x^2+2)=$$

תשובה 4

א. הסגירות נובעת רכיב רכיב, חוק הקיבוץ נובע רכיב רכיב, אבר היחידה הוא $(0,0)$ וההפכי של (x,y) הוא $(-x,-y)$ וגם הוא מוגדר רכיב רכיב.

ב.

$$
\begin{aligned}
&(0,0)^1 = 0\\
&(1,0)^2 = (2,0), (1,0)^3 = (3,0), (1,0)^4 = (0,0)\\
&(2,0)^2 = (0,0).\\
&(3,0)^2 = (2,0), (3,0)^3 = (1,0), (3,0)^4 = (0,0)\\
&(0,1)^2 = (0,2), (0,1)^2 = (0,0).\\
&(0,2)^2 = (0,1), (0,2)^3 = (0,0)\\
&(1,1)^2 = (2,2), (1,1)^3 = (3,0), (1,1)^4 = (0,1), (1,1)^5 = (1,2), (1,1)^6 = (2,0),\\
&(1,1)^7 = (3,1), (1,1)^8 = (0,2), (1,1)^9 = (1,0), (1,1)^{10} = (2,1), (1,1)^{11} = (3,2), (1,1)^{12} = (0,0).
\end{aligned}
$$

ג. ברגע שמצאנו בחבורה בת 12 איברים אבר מסדר 12, ברור כי היא מחזורית בעלת סדר 12, וכל הח״ח החלקיות שלה הן מחזוריות. לכל מספר d אשר מחלק את 12 יש ח״ח בת אותו מספר של איברים, שאיבריה הן כל החזקות של היוצר עם מעריכים שהם כפולות של $\frac{12}{d}$

תשובה 5

קודם כל נחשב את כל האיברים שיש להם ממם (gcd) 1 עם 16 והללו הם 1,3,5,7,9,11,13,15, כלומר החבורה הזו היא בת 8 איברים. כעת נחשב את הסדר של כל איבר:

$$
\begin{aligned}
&1^1 = 1\\
&3^2 = 9 = 9, 3^3 = 27 = 11, 3^4 = 81 = 1\\
&5^2 = 25 = 9, 5^3 = 9\cdot 5 = 45 = 13, 5^4 = 13\cdot 5 = 65 = 1\\
&7^2 = 49 = 1,\\
&9^2 = 81 = 1,\\
&11^2 = 121 = 9, 11^3 = 9\cdot 11 = 99 = 3, 11^4 = 3\cdot 11 = 33 = 1\\
&13^2 = 169 = 9, 13^3 = 9\cdot 13 = 117 = 5, 13^4 = 5\cdot 13 = 65 = 1,\\
&15^2 = 225 = 1,
\end{aligned}
$$

. לכן החבורה איננה ציקלית כיון שאין לה איבר מסדר 8. בנוסף
$11^{137} = 11^{4\cdot 34+1} = (11^4)^{34} 11 = 1\cdot 11 = 11$ כדרוש.

יש 4 איברים מסדר 4 והם יוצרים 2 ח״ ח מסדר 4 אשר איזומורפיות ל $\mathbb{Z}_4$ האחת מכילה את 3 ו 11, השניה את 13 ואת 5. יש 3 איברים מסדר 2 והללו יוצרים 3 ח״ח בנות שני איברים אשר איזומורפיות ל $\mathbb{Z}_2$, ובנוסף 3 האברים מסדר 2 יוצרים ח״ח בת ארבעה איברים אשר איזומורפית לחבורת קליין $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, ואשר כוללת את 3 החבורות החלקיות האיזומורפיות ל $\mathbb{Z}_2$ כחבורות חלקיות. לכן יש 2+3+1 חבורות חלקיות אמיתיות, ובנוסף החבורות החלקיות הטריוויאליות בנות אבר אחד וכל G, סה״כ 8 חבורות חלקיות.

תשובה 10

$$0+0=0, 1+1=2, 2+2=4, 3+3=6, 4+4=8, 5+5=10, 6+6=0, 7+7=2,$$
$$8+8=4, 9+9=6, 10+10=8, 11+11=10, \mathbb{Z}_{12}^2=\{0,2,4,6,8,10\} \le \mathbb{Z}_{12}$$

ב.

$$I\circ I=I, RR\circ RR=RL, RL\circ RL=RR, A\circ A=I, B\circ B=I, C\circ C=I, \mathbb{S}_3^2=\{I,RL,RR\} \le \mathbb{S}_3$$

ג

$$0+0+0=0, 1+1+1=3, 2+2+2=6, 3+3+3=9, 4+4+4=0, 5+5+5=3,$$
$$6+6+6=6, 7+7+7=9, 8+8+8=0, 9+9+9=3, 10+10+10=6,$$
$$11+11+11=9, \mathbb{Z}_{12}^2=\{0,3,6,9\} \le \mathbb{Z}_{12}$$

ד.

$$I\circ I\circ I=I, RR\circ RR\circ RR=I, RL\circ RL\circ RL=I, A\circ A\circ A=A, B\circ B\circ B=B, C\circ C\circ C=C,$$
$$\mathbb{S}_3^3=\{I,A,B,C\}$$

קבוצה זו איננה ח״ח.

עבור $\mathbb{S}_3$ רק חזקות זוגיות יתנו ח״ח, עבור $\mathbb{Z}_{12}$ כל חזקה תתן ח״ח.

תשובה 11

א. מכיון שחבור וחסור כפל וחלוק של מספרים רציונליים הוא מספר רציונלי אז באמת $\mathbb{Q}([i])$ הוא תת שדה.

ב. הפולינום x^2-2 . הוא עם מקדמים שלמים ופתרונו ב $\mathbb{R}-\mathbb{Q}([i])$

ג. הפולינום x^2+1 . הוא עם מקדמים שלמים ופתרונו ב $\mathbb{Q}([i])-\mathbb{R}$