המכללה האקדמית נתניה ע"ר
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

NETANYA ACADEMIC COLLEGE (R"S)
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

מבחן סוף במבנים אלגבריים למדעי המחשב-סמסטר קיץ ה'תשע"ו.

מועד ג יום ה ב מרחשוון התשע"ז 3-11-2016

- מורה: גיורא דולה, מתרגל: רענן שכטר.
- משך המבחן הוא שלש שעות.
- אפשר להשתמש רק במחשבון ובדפי העזר המצורפים.
- יש לכתוב במחברת תשובה מלאה על כל אחת מהשאלות.
- במבחן יש שלשה חלקים. בחלק א חמש שאלות מתוכן יש לבחור 4 ומשקל כל שאלה 10 נקודות. בחלק ב יש 4 שאלות ומתוכן יש לבחור 3. משקל כל שאלה בחלק ב 15 נקודות. בחלק ג שתי שאלות מתוכן יש לבחור אחת ומשקל כל שאלה 15 נקודות ס"הכ $3*15+4*10+1*15=100$
- מותר להסתמך על כל טענה שהוכחה בכתה אך יש לנסח אותה במדויק בנפרד.

בהצלחה.

עמותה רשומה 580242451 **Fax:** (972-9) 8844439 **:פקס** **Tel:** (972-9) 8607777 **:טל**

חלק א

שאלה 1

נתון משושה משוכלל ב $\mathbb{R}^2$ בעל קדקדים F,E,D,C,B,A. הגדר את G כאוסף כל ההעתקות שומרות המרחק החד חד ערכיות (חח"ע) ועל של המשושה לעצמו עם פעולת הרכבת העתקות.

א. רשום את כל איברי G.

ב. חשב את הסדר של כל אבר ב-G.

ג. כמה הומומורפיזמים חח"ע $f:\mathbb{S}_3 \to G$ ישנם ? רשום אותם.

ד. כמה הומומורפיזמים חח"ע $f:\mathbb{Z}_6 \to G$ ישנם ? רשום אותם.

שאלה 2

שתי תמורות על הקבוצה $\mathbb{Z}_7 = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ מוגדרות על ידי הנוסחאות הבאות (הפעולות מבוצעות ב $\mathbb{Z}_7$).

$$f = \begin{cases} \dfrac{x+2}{5-5x} & 1 \neq x \in \mathbb{Z}_7 \\ a & 1 = x \in \mathbb{Z}_7 \end{cases}, g = \begin{cases} \dfrac{2x+3}{4-5x} & 5 \neq x \in \mathbb{Z}_7 \\ b & 5 = x \in \mathbb{Z}_7 \end{cases}$$

א. מצא את a ואת b.

ב. חשב את $f^{-1}g^{-3}$.

ג. פרק את $f^{-1}g^{-3}$. למכפלה של מחזורים זרים.

ד. פרק את $f^{-1}g^{-3}$. למכפלה של חילופים.

ה. מצא את הסדר של $f^{-1}g^{-3}$.

שאלה 3

חשב את המחלק המשותף $d(x)$ הגדול ביותר של הפולינומים הבאים :

$a(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \in \mathbb{Z}_7[x],\ \ b(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1 \in \mathbb{Z}_7[x]$. מצא פולינומים $u(x), v(x) \in \mathbb{Z}_7[x]$ המקיימים $\mathrm{d(x)=gcd}(a(x), b(x)) = a(x)u(x) + b(x)v(x)$.

שאלה 4

תהינה $G=(\mathbb{S}_3,\circ)$ עם פעולת ההרכבה ו $H=(\mathbb{Z}_2,\oplus_2)$ עם פעולת החיבור מודולו, ונגדיר על הקבוצה $G\times H$ פעולה בינרית על ידי

$$\forall (g,h),(a,b)\in G\times H,(g,h)(a,b)=(g\circ a,h\oplus_2 b)$$

א. הוכח כי $G\times H$ עם הפעולה הזו היא חבורה.

ב. מצא את כל הסדרים של כל האיברים בחבורה.

ג. מצא 9 חבורות חלקיות ציקליות שונות של $G\times H$.

שאלה 5

נתונה החבורה $(\mathbb{Z}_{36}^*,\cdot)$. (כל האיברים ההפיכים עם פעולת הכפל).

א. חשב את 7^{137} ב- $(\mathbb{Z}_{36}^*,\cdot)$.

ב. מצא את הסדרים של כל האיברים של $(\mathbb{Z}_{36}^*,\cdot)$.

ג. מצא ב $(\mathbb{Z}_{36}^*,\cdot)$ חבורה חלקית ציקלית גדולה ביותר.

<u>חלק ב</u>

שאלה 6

הוכח משפט קיום ויחידות חלוקת פולינומים בחוג הפולינומים $S[x]$.
עבור שדה S.

שאלה 7

יהי $f:G\to H$ הומומורפיזם של חבורות: הוכח

א. תהי $K\le G$ חבורה חלקית אז $f(K)\le H$ חבורה חלקית.

ב. תהי $L\le H$ חבורה חלקית אז $f^{-1}(L)\le G$ חבורה חלקית.

ג. f חח״ע אם ורק אם Ker(f)={e}

.

שאלה 8

הוכח כי לכל חבורה G וחבורה חלקית H מתקיים

א. $\forall g \in G, g \in g*H$

ב. $\forall g,k \in G, k \in g*H \to k*H \subseteq g*H$

ג. $\forall g,k \in G, k \in g*H \to k*H = g*H$

ד.* $\forall g,k \in G,\ [(g*H \cap k*H \neq \emptyset) \to (g*H = k*H)]$.

ה.* $a_g : H \to g*H$ $\forall g$ היא פונקציה חד חד ערכית ועל.

ו.* $G = \bigcup_{g \in G} g*H$.

שאלה 9

יהיו $a,b \in \mathbb{Z}$ שני מספרים שלפחות אחד מהם שונה מ-0.אז קימים מספרים $x,y \in \mathbb{Z}$ כך שמתקיים $ax+by=\gcd(a,b)$.

חלק ג

שאלה 10

נתון חוג R. אבר $x \in R$ יקרא נילפוטנטי אם קים $n \in \mathbb{N}$ כך שמתקיים $x^n = 0$. (נשים לב כי מדובר על פעולת הכפל, כלומר $x^n = x \cdot x \cdot x \cdots x$ על ידי הכפל). $n \in \mathbb{N}$ הקטן ביותר עם התכונה הזו קרוי סדר הנילפוטנטיות של $x \in R$. אם $x \in R$ אינו נילפוטנטי אומרים כי סדר הנילפוטנטיות שלו הוא ∞.

1. מצא את כל האיברים הנילפוטנטים, אם יש כאלו, בחוג $\mathbb{Z}_6$ ולכל אבר כזה רשום מהו סדר הנילפוטנטיות שלו.

2. מצא את כל האיברים הנילפוטנטים, אם יש כאלו, בחוג $\mathbb{Z}_{36}$ ולכל אבר כזה רשום מהו סדר הנילפוטנטיות שלו.

שאלה 11

נתון חוג R . נגדיר את S להיות אוסף הסדרות בעלות אורך סופי של איברים מ R. הגדר על S מבנה של חוג
הוכח את קיום אקסימות החיבור על S.
מצא הומומורפיזם חח״ע של חוגים $R[x] \to S$ כאשר $R[x]$ הוא חוג הפולינומים עם מקדמים בR.

בהצלחה

תשובות:

תשובה 1

ברור כי כל העתקה חח״ע ועל ששומרת על המרחק צריכה לשלוח כל קדקד לקדקד אחר. נסמן את הקדקדים ב E,D,C,B,A F ויש 12 העתקות:

$$\begin{array}{l} I:(A,B,C,D,E,F)\to(A,B,C,D,E,F), s:(A,B,C,D,E,F)\to(F,A,B,C,D,E),\\ t:(A,B,C,D,E,F)\to(E,F,A,B,C,D), u:(A,B,C,D,E,F)\to(D,E,F,A,B,C),\\ v:(A,B,C,D,E,F)\to(C,D,E,F,A,B), w:(A,B,C,D,E,F)\to(B,C,D,E,F,A),\\ a:(A,B,C,D,E,F)\to(F,E,D,C,B,A), ad:(A,B,C,D,E,F)\to(A,F,E,D,C,B),\\ x:(A,B,C,D,E,F)\to(B,A,F,E,D,C), ce:(A,B,C,D,E,F)\to(C,B,A,F,E,D),\\ y:(A,B,C,D,E,F)\to(D,C,B,A,F,E), cf:(A,B,C,D,E,F)\to(E,D,C,B,A,F) \end{array}.$$

הסדר של I הוא אחד, הסדרים של a,b,c,d,e הם 2, הסדרים של s,w הם 6, הסדרים של t,v הם 3. .הסדרים של u,ad,ce,cf,x,y הם 2.

הומומורפיזם חח"ע $f:\mathbb{S}_2\to G$ יתכן רק אם היוצר של $\mathbb{S}_2$ ילך לאיבר מסדר 2, ויש 7 כאלו.

הומומורפיזם חח"ע $f:\mathbb{Z}_6\to G$ יתכן רק אם היוצר של $\mathbb{Z}_6$ ילך לאיבר מסדר 6, ויש 2 כאלו.

תשובה 2

נחשב את f ואת g בצורה מפורשת. עבור f :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2/5 & 3/0 & 4/(-5) & 5/(-10) & 6/(-15) & 7/(-20) & 8/(-25) \\ 2/5 & 3/0 & 4/2 & 5/4 & 6/6 & 7/1 & 8/3 \\ 6 & ? & 2 & 3 & 1 & 0 & 5 \end{array}$$

ולכן נקבל את f על ידי :

$$f\downarrow\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 2 & 3 & 1 & 0 & 5 \end{array}$$

ובצורה דומה עבור עבור g

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3/4 & 5/(-1) & 7/(-6) & 9/(-11) & 11/(-16) & 13/(-21) & 15/(-26) \\ 3/4 & 5/6 & 7/1 & 2/3 & 4/5 & 6/0 & 1/2 \\ 6 & 2 & 0 & 3 & 5 & ? & 4 \end{array}$$

ולכן נקבל את g על ידי :

$$g\downarrow\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 0 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{array}$$

וגם את g^2 ו g^3 :

$$\begin{array}{cccccccc} x & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ g(x) & 6 & 2 & 0 & 3 & 5 & 1 & 4 \\ g^2(x) & 4 & 0 & 6 & 3 & 1 & 2 & 5 \\ g^3(x) & 5 & 6 & 4 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}$$

וכעת נחשב את ההפוכים :

$$f\downarrow\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 2 & 3 & 1 & 0 & 5 \end{array}$$

$$f^{-1}\downarrow\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 1 & 6 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc} x & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ g(x) & 6 & 2 & 0 & 3 & 5 & 1 & 4 \\ g^3(x) & 5 & 6 & 4 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ g^{-3}(x) & 5 & 6 & 4 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}$$

ולבסוף נקבל את ההרכבה :

$$\begin{array}{cccccccc} x & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ g^{-3}(x) & 5 & 6 & 4 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ f^{-1}(x) & 5 & 4 & 2 & 3 & 1 & 6 & 0 \\ f^{-1}g^{-3}(x) & 6 & 0 & 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{array}$$

העתקה זו היא מהצורה (06421) ובעלת סדר 5,

ונקבל אותה כמכפלת חלופים : (01)(02)(04)(06).

תשובה 3

$$x^4+3x^3+3x^2+3x+2=(x^3+4x^2+4x+1)x+(2x^2+3x+1)$$
$$(x^3+4x^2+4x+1)=(4x+3)(2x^2+3x+1)+5x+5.$$
$$2x^2+3x+1=(5x+5)(6x+3)\ \mathrm{gcd}=5x+5$$

$$5x+5=(x^3+4x^2+4x+1)-(4x+3)(2x^2+3x+1)=$$
$$=(x^3+4x^2+4x+1)-(4x+3)[x^4+3x^3+3x^2+3x+2-(x^3+4x^2+4x+1)x]=$$
$$=[x(4x+3)+1](x^3+4x^2+4x+1)(4x+3)[x^4+3x^3+3x^2+3x+2]$$

תשובה 4

א. הסגירות נובעת רכיב רכיב, חוק הקיבוץ נובע רכיב רכיב, אבר היחידה הוא $(I,0)$ וההפכי של (x,y) הוא $(x^{-1},-y)$ וגם הוא מוגדר רכיב רכיב.

נסמן את איברי החבורה $G=(\mathbb{S}_3,\circ)=\{I,S,T,a,b,c\}$

ב.

$$(I,0)^1=(I,0)$$
$$(S,0)^2=(T,0),(S,0)^3=(I,0)$$
$$(T,0)^2=(S,0),(T,0)^3=(I,0)$$
$$(a,0)^2=(I,0)$$
$$(b,0)^2=(I,0)$$
$$(c,0)^2=(I,0)$$
$$(I,1)^2=(I,0)$$
$$(S,1)^2=(T,0),(S,1)^3=(I,1),(S,1)^4=(S,0),(S,1)^5=(T,1),(S,1)^6=(I,0)$$
$$(T,1)^2=(S,0),(T,1)^3=(I,1),(T,1)^4=(T,0),(T,1)^5=(S,1),(T,1)^6=(I,0)$$
$$(a,1)^2=(I,0)$$
$$(b,1)^2=(I,0)$$
$$(c,1)^2=(I,0)$$

ג. החבורות החלקיות הנוצרות על ידי

$(S,0),(a,0),(b,0),(c,0),(I,1),(S,1),(a,1),(b,1),(c,1)$ כולן ציקליות ושונות זו מזו.

תשובה 5

קודם כל נחשב את כל האיברים שיש להם ממממ (gcd) 1 עם 36 והללו הם 1,5,7,11,13,17,19,23,25,29,31,35 כלומר החבורה הזו היא בת 12 איברים. כעת נחשב את הסדר של כל איבר:

$1^1=1$

$5^2=25, 5^3=125=17, 5^4=85=13, 5^5=65=29, 5^6=145=1$

$7^2=49=13, 7^3=13\cdot 7=91=19, 7^4=19\cdot 7=133=25, 7^5=25\cdot 7=175=31, 7^6=31\cdot 7=217=1$

$11^2=121=13, 11^3=11\cdot 13=143=35, 11^4=11\cdot 35=385=25, 11^5=11\cdot 25=275=23, 11^6=11\cdot 23=253=1$

$13^2=169=25, 13^3=25\cdot 13=325=1$

$17^2=289=1$

חישבנו את הסדרים של האיברים הקטנים. כל איבר שעוד לא חישבנו הוא הנגדי החיבורי של איבר שחישבנו כלומר מינוס שלוף ולכן ניתן להשתמש בעובדה הזו לחישוב החזקות החסרות.

$19^2=(-17)^2=17^2=1$

$(23)^2=(-13)^2=13^2=25, (23)^3=(-13)^3=-13^3=-1=35, (23)^4=(-13)^4=13^4=13,$

$(23)^5=(-13)^5=-13^5=-25=11, (23)^6=(-13)^6=13^6=1$

$(25)^2=(-11)^2=11^2=13, (23)^3=(-11)^3=-11^3=-35=1$

$(29)^2=(-7)^2=7^2=13, (29)^3=(-7)^3=-7^3=-19=17, (29)^4=(-7)^4=7^4=25,$

$(29)^5=(-7)^5=-7^5=-31=5, (29)^6=(-7)^6=7^6=1$

$(31)^2=(-5)^2=25, (31)^3=(-5)^3=-17=19, (31)^4=(-5)^4=13, (31)^5=(-5)^5=-29=7, (31)^6=(-5)^6=1$

$(35)^2=(-1)^2=1$

כל חבורה חלקית הנוצרת על ידי איבר מסדר 6 היא חבורה חלקחת ציקלית הגדולה ביותר.

בנוסף $137=132+5=6\cdot 22+5$ ולכן $7^{137}=7^{6\cdot 22+5}=(7^6)^{22}7^5=1\cdot 31=31$ כדרוש.

תשובה 10

בחוג $\mathbb{Z}_6$ כל איבר מתחלק ב2 או מתחלק ב 3 או לא מתחלק לא ב 2 ולא ב-3. חזקה של מספר שאיננו זוגי לא תהיה זוגית, חזקה של

מספר שאיננו מתחלק ב-3 לא תתחלק ב-3, ולכן אין אף איבר נילפוטנטי.

בחוג $\mathbb{Z}_{36}$ בצורה דומה על איבר נילפוטנטי להתחלק ב-2 וב -3, ולכן עליו להתחלק ב-6. כלומר עליו להיות 6,12,18,24,30. כל אחד מהאיברים הללו שונה מ-0 , והרבוע של כל אחד הוא כפולה של 36, כלומר הללו כולם נילפוטנטיים מסדר נילפוטנטיות 2.

תשובה 11

נתונה סדרה סופית של איברים מ R, $(a_0,a_1,\cdots,a_n)$ ונסמן אותה בקצור על ידי $p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ כלומר ניתן לחשוב על סדרה באורך n+1 כעל פולינום מדרגה n . לכן ניתן לזהות $S=R[x]$, כלומר ניתן לזהות את S עם חוג הפולינומים עם מקדמים ב R, ולכן פעולות החוג S הן פעולות החוג $R[x]$ וביחוד זהו אכן חוג.

אקסיומות החיבור נובעות רכיב רכיב מאלו של R. ההומומורפיזם חח״ע של חוגים $R[x]\to S$ הוא אפילו איזומורפיזם.