המכללה האקדמית נתניה
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

Netanya Academic College
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
Netanya 42365, ISRAEL

<u>מבחן אמצע במבנים אלגבריים למדעי המחשב-סמסטר קיץ כתת הנדסאים.</u>

<u>יום ה,כה אלול התשס"ט 10-9-2009</u>

- מורה: גיורא דולה, מתרגל: רענן שכטר.
- משך המבחן הוא שעה וחצי.
- אפשר להשתמש רק במחשבון.
- יש לכתוב במחברת תשובה מלאה על כל אחת מהשאלות.
- משקל כל שאלה 34 נקודות.

בהצלחה.

Fax: (972-9) 8607711 **:פקס** **Tel:** (972-9) 8607777 **:טל**

ענה על כל שלש השאלות הבאות

.1

שתי תמורות של הקבוצה $\mathbf{Z}_7=\{0,1,2,3,4,5,6\}$ מוגדרות ע"י הנוסחאות הבאות: $\mathrm{f}(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{2x+1}, x\neq 3\\ a, x=3\end{cases}, x\in\mathbf{Z}_7$

$g(x)=\begin{cases}\frac{2x+1}{3x+1}, x\neq 2\\ b, x=2\end{cases}, x\in\mathbf{Z}_7$

(הפעולות מתבצעות ב-$\mathbf{Z}_7$).

א- השלם את הערכים החסרים a,b בהגדרות של f ושל g.

ב-פרק את התמורה $f^{-1}g$ למכפלה של מחזורים זרים ומצא את הסדר שלה.

.2 נביט על $G=\{f:R\to R\}$ כך שהפונקציה f היא חח"ע ועל, עם פעולת ההרכבה נגדיר שני איברים $tz,s:R\to R$ על ידי $tz(x)=x+1, s(x)=-x$.

א. בדק כי tz,s הם אכן איברים של G.

ב. מצא את הסדר של כל אחד מהאיברים שבדקת בסעיף א.

ג. השוה בין tzs ובין stz (מצא שויון שבצד אחד שלו מופיע tzs ובצד שני מופיע stz).

ד. האם G אבלית.

ה. נתון אבר $g\in G$ מסדר 2 . האם מכאן נובע כי $g=s$?

.3 נתונות חבורות $(G,*),(H,\circ)$ נגדיר חבורה $(G\oplus H,\bullet)$ על ידי: הקבוצה היא $G\times H$ והפעולה מוגדרת על ידי $(g_1,h_1)\bullet(g_2,h_2)=(g_1*g_2,h_1\circ h_2)$ (פעולה רכיב רכיב).

הערה: אפשר לקבל ניקוד מלא ללא תשובה על סעיף א ועל אותו חלק של סעיף ג הממשיך את סעיף א. סעיף זה ניתן כהכנה לסעיף ב.

א. הכן את טבלת הפעולה של $Z_2\times Z_2$.

ב. הכן את טבלת הפעולה של $Z_2\times Z_3$.

ג. מצא את הסדר של כל אחד מהאיברים אשר מופיעים בחבורות שחשבת בסעיפים א ו-ב.

ד. לכל $(x,y)\in G\oplus H$ בטא את הסדר של (x,y) כפונקציה של הסדר של x ושל הסדר של y .
ה. מצא איזומורפיזם של $Z_2\times Z_3$ עם חבורה אחרת (שאיננה מהצורה $(G\oplus H,\bullet)$) .
ו. הוכח כי $(G,*)$ איזומורפית לחבורה חלקית של $(G\oplus H,\bullet)$.

תשובות:

תשובה 1

f(0)=-1/1=-1=6,f(1)=0/3=0,f(2)=1/5=3,f(3)=2/7=?,f(4)=3/9=3/2=12=5,f(5)=4/11=4/4=1,f(6)=5/13=5/6=5/(-1)=-5=2→f(3)=4

ולכן נקבל
$$f:\begin{pmatrix}0&1&2&3&4&5&6\\6&0&3&4&5&1&2\end{pmatrix}, f^{-1}:\begin{pmatrix}6&0&3&4&5&1&2\\0&1&2&3&4&5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&2&3&4&5&6\\1&5&6&2&3&4&0\end{pmatrix}$$

וכמו כן

g(0)=1/1=1,g(1)=3/4=6,g(2)=5/7=?,g(3)=7/10=0,g(4)=9/13=2/(-1)=-2=5,g(5)=11/16=4/2=2,g(6)=13/19=(-1)/5=-3=4→g(2)=3

ולכן
$$g:\begin{pmatrix}0&1&2&3&4&5&6\\1&6&3&0&5&2&4\end{pmatrix}, f^{-1}:\begin{pmatrix}0&1&2&3&4&5&6\\1&5&6&2&3&4&0\end{pmatrix}\to$$
$$f^{-1}g:\begin{pmatrix}0&1&2&3&4&5&6\\5&0&2&1&4&6&3\end{pmatrix}=(0,5,6,3,1)(2)(3)\to o(f^{-1}g)=5$$

תשובה 2.

א. ברור כי כל אחת חח"ע ועל ידי זה שנמצא לה הפוך. $s^{-1}=s$ וכמו כן $tz^{-1}(x)=x-1$.
ב. כיון ש $s^{-1}=s$ נובע כי מסדר 2. כמו כן לכל n מתקיים כי $tz^{n}(x)=x+n\neq I(x)=x$ ולכן זהו אבר מסדר אינסופי.
ג. נפעיל את ההרכבה ונקבל: $s*tz(x)=s(x+1)=-x-1,$ וכמו כן $tz*s(x)=tz(-x)=-x+1,$
ולכן מתקיים כי $tz^2*s*tz(x)=tz*s$ וזו תשובה לשאלה (נסוח קצר יותר: $tz*s*tz(x)=s$)
ד. לפי הסעיף הקודם G איננה אבלית.
ה. נביט על האבר $tz*s(x)$ ב-G הוא מקיים כי $(tz*s)^2(x)=-(-x+1)+1=x-1+1=x=I(x)$
ולכן הוא מסדר 2 אך שונה מ-s.

תשובה 3

א. נסמן את החבורה השמאלית כציקלית עם יוצר a מסדר 2, ואת הימנית כציקלית עם יוצר b מסדר 2, אז אברי חבורת הסכום הישר הם המכפלה הקרטזית {(e,e),(e,b),(a,e),(a,b)}.
ולהם נעשה טבלת פעולה:

	(e,e)	(e,b)	(a,e)	(a,b)
(e,e)	(e,e)	(e,b)	(a,e)	(a,b)
(e,b)	(e,b)	(e,e)	(a,b)	(a,e)
(a,e)	(a,e)	(a,b)	(e,e)	(e,b)
(a,b)	(a,b)	(a,e)	(e,b)	(e,e)

ב. נסמן את החבורה השמאלית כציקלית עם יוצר a מסדר 2, ואת הימנית כציקלית עם יוצר b מסדר 3, אז אברי חבורת הסכום הישר הם המכפלה הקרטזית {(e,e),(e,b),(e,bb),(a,e),(a,b),(a,bb)}. ולהם נעשה טבלת פעולה:

	(e,e)	(e,b)	(e,b^2)	(a,e)	(a,b)	(a,b^2)
(e,e)	(e,e)	(e,b)	(e,b^2)	(a,e)	(a,b)	(a,b^2)
(e,b)	(e,b)	(e,b^2)	(e,e)	(a,b)	(a,b^2)	(a,e)
(e,b^2)	(e,b^2)	(e,e)	(e,b)	(a,b^2)	(a,e)	(a,b)
(a,e)	(a,e)	(a,b)	(a,b^2)	(e,e)	(e,b)	(e,b^2)
(a,b)	(a,b)	(a,b^2)	(a,b)	(e,b)	(e,b^2)	(e,e)
(a,b^2)	(a,b^2)	(a,e)	(a,b)	(e,b^2)	(e,e)	(e,b)

ג. בחבורה הראשונה מתקים $o(e,e)=1, o(e,b)=2, o(a,e)=2, o(a,b)=2$ בחבורה השניה מתקים $o(e,e)=1, o(e,b)=3, o(e,b^2)=3, o(a,e)=2, o(a,b)=6, o(a,b^2)=6$

ד. מתקיים כי $\forall(x,y)\in G\oplus H, o(x,y)=lcm(o(x),o(y)).$

ה. כיון שבחבורה השניה יש איבר מסדר 6 היא איזומורפית ל- Z_6.

ו. נגדיר הומומורפיזם $f:G\to G\oplus H$ על ידי $\forall g\in G, f(g)=(g,e).$ קל לראות כי זהו אכן הומומורפיזם חח"ע.