

מבחן אמצע בקורס מבנים אלגבריים מסלול הנדסאים.

יום ב יג אלול התשס"ז, 27-8-2007 .

- מורה : גיורא דולה. מתרגל : רענן שכטר.
- משך המבחן שעה וחצי.
- המבחן הוא ללא חומר עזר למעט מחשבוני.
- משקל כל שאלה 50 נקודות.

**בהצלחה.**

שאלה 1 (40 נקודות)

נתונים  $a=675, b=3087, c=6125$ . מצא את  $\gcd(a,b), \gcd(a,c), \gcd(a,b,c)$ .

שאלה 2 (30 נקודות)

נתונה חבורה אבלית  $G$ . נזכר בסדר  $o(g)$  של האבר  $g$  בחבורה  $G$ . נתונים איברים  $a, b$  השיכים ל- $G$  ונתון ש  $o(a), o(b)$  סופיים. מצא חסם עבור  $o(a*b)$  אשר תלוי ב- $o(a)$  וב- $o(b)$ .

שאלה 3 (30 נקודות)

נביט על האסף  $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{R}, a^2 + b^2 \neq 0 \right\}$  עם פעולת כפל מטריצות.

בדוק האם הקבוצה עם הפעולה מהוות חבורה, והאם מתקים חק החלוף.

תשובות

תשובה לשאלה 1

$$a=675=5*135=5*5*27=5^23^3.$$

$$b=3087=3*1029=3*3*343=3^27^3.$$

$$c=6125=5*1225=5*5*245=5*5*5*49=5^37^2.$$

ולכן  $\gcd(a,b)=9, \gcd(a,c)=25, \gcd(a,b,c)=1$ .

תשובה לשאלה 2

נביט על  $\text{lcm}(o(a), o(b))=c$ . אז  $o(a)$  ו- $o(a)$  מחלקים את  $c$  וזהו המספר הקטן ביותר אשר שניהם מחלקים אותו. לכן יש מספרים טבעיים  $x, y$  כך שמתקיים  $c=xo(a)=yo(b)$ . אז:

$$(ab)^c =_A a^c b^c = (a^{o(a)})^x (b^{o(b)})^y = e * e = e$$

תשובה לשאלה 3

כיון שאסוף המטריצות  $M_2(\mathbb{R})$  הוא חוג, לכן מבנה הכפל הוא מונואיד, נובעת האסוציאטיביות מזו של כפל מטריצות. עלינו לבדוק רק את אקסיומות 1,3,4.

אקסיומה 3 קלה לבדיקה, פשוט נבחר  $a=1, b=0$  ונקבל כי  $I_2$  היא אבר של  $G$ .

באקסיומה 1 עלינו לבדוק סגירות ואכן:

$$\text{ולכן תתקיים סגירות כאשר נוכיח כי } \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{pmatrix}$$

$$\cdot (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2 \neq 0$$

ואכן:

$$(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2 = (ac)^2 + (bd)^2 - 2abcd + (ad)^2 + (bc)^2 + 2abcd =$$

$$= (ac)^2 + (bd)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 \neq 0$$

נותרה אקסיומה A4. לכל  $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$  נביט על  $\begin{pmatrix} a/a^2+b^2 & -b/a^2+b^2 \\ b/a^2+b^2 & a/a^2+b^2 \end{pmatrix}$  נכפל

ונקבל:  $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a/a^2+b^2 & -b/a^2+b^2 \\ b/a^2+b^2 & a/a^2+b^2 \end{pmatrix} = I_2$  וקבלנו הפכי משמאל.

נותרה אקסיומה A5. אז:  $\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{pmatrix}$  ולכן

מתקיים חק החלוף וההפכי משמאל הוא גם הפכי מימין.