רשימת משפטים למבחן מבנים.

1. לכל מספר שלם a ולכל מספר חיובי b מתקיים
א. קיימים מספרים שלמים r ו q כך ש

$$a = bq + r, 0 \le r < b$$

ב. ישנו זוג יחיד של המספרים r ו q שמקיימים את א׳.

2 יהיו a, b שני שלמים שלפחות אחד מהם שונה מאפס. אז קיימים מספרים שלמים x, y כך ש- $ax + by = \gcd(a,b)$.

4. תת-קבוצה $H \neq \emptyset$ תהיה תת-חבורה אם ורק אם היא מקיימת:
$\forall a \in H \ \forall b \in H \quad ab^{-1} \in H$.

5. יהי $f : G \to H$ הומומורפיזם של חבורות. אז
א. $f(e_G) = e_H$.
ב. $\forall g \in G \quad f(g^{-1}) = (f(g))^{-1}$.
ג. $\forall g \in G \quad \forall n \in \mathbf{Z} \quad f(g^n) = (f(g))^n$.

6. יהי $f : G \to H$ הומומורפיזם של חבורות:

א. תהי K חבורה חלקית של G. אז התמונה $f(K)$ היא חבורה חלקית של H.
ב. תהי L חבורה חלקית של H. אז התמונה ההפוכה $f^{-1}(L)$ היא חבורה חלקית של G.
ג. f חח״ע או״א Ker(f)={e}.

7. א*. $\forall g \quad g \in g * H$
ב*. $\forall g, k \in G, k \in g * H \to k * H \subseteq g * H$.
ג*. $\forall g, k \in G, k \in g * H \to k * H = g * H$.
ד*. $\forall g, k \in G, \ [(g * H \cap k * H \neq \emptyset) \to (g * H = k * H)]$.
ה*. $\forall g \quad a_g : H \to g * H$ היא פונקציה חח״ע ועל.
ו*. $G = \bigcup_{g \in G} g * H$.

8. תהי H תת-חבורה כלשהי של חבורה סופית G. אז $[G:H] = \frac{|G|}{|H|}$.

9. אם $H \le G$ ו G חבורה סופית, אז $|H|$ מחלק את $|G|$.

א. נתון איבר g של החבורה G בעל סדר אינסופי אז השוויון $g^m = g^n$ מתקיים אם ורק אם $m = n$.

ב. נתון איבר g של החבורה G בעל סדר k אז השוויון $g^m = g^n$ מתקיים אם ורק אם $k \mid (m-n)$.

10. אם $g \in G$ איבר מסדר סופי, אז $<g>=\{g^1,...,g^{o(g)-1},g^{o(g)}\}$ ו $|<g>|=o(g)$

11. יהי $g \in G$ איבר כלשהו. אז

א. אם $o(g)=\infty$ אז $(<g>,*) \cong (\mathbf{Z},+)$.

ב. אם $o(g)=n<\infty$ אז $(<g>,*) \cong (\mathbf{Z}_n,+)$.

12. אם Fשדה $f(x),g(x) \in F[x]$ שני פולינומים כלשהם, $g(x) \neq 0(x)$, אז קיימים שני פולינומים יחידים $q(x),r(x) \in F[x]$ כך ש:

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x), 0 \le \deg(r(x)) < \deg(g(x))$$

13. נתונים שני פולינומים $f(x),g(x) \in F[x]$, , אז קיימים שני פולינומים $a(x),b(x) \in F[x]$ כך ש:

$$a(x)f(x)+b(x)g(x)=\gcd(f(x),g(x)).$$

14. . נתון פולינום $f(x) \in F[x]$. אז קימים פולינומים בלתי פריקים $p_1(x),...,p_n(x) \in F[x]$ כך שמתקיים $f(x)=p_1(x)*...*p_n(x)$. כמו כן ההצגה יחידה. אם $f(x)=p_1(x)*...*p_n(x)=q_1(x)*...*q_m(x)$. גם כן הצגה אז חיב להתקים m=n וכמו כן לכל $i, 1 \le i \le n$ קים $j, 1 \le j \le m=n$ כך ש $\frac{p_i(x)}{q_j(x)}=const.$.

15. נתונים שני פולינומים $f(x),g(x) \in F[x]$, , אז קים $\gcd(f(x),g(x))$.