

רשימת משפטים למבחן מבנים תשעה.

1. נגדיר יחס על אוסף כל החבורות:  $G$  מתיחסת ל  $H$  אם קיים איזומורפיזם של  $G$  על  $H$ . הוכח כי היחס הוא יחס שקילות.

2. תת-קבוצה  $H \neq \emptyset$  תהיה תת-חבורה אם ורק אם היא מקיימת:  $\forall a \in H \forall b \in H \quad ab^{-1} \in H$ .

3. יהי  $f: G \rightarrow H$  הומומורפיזם של חבורות. אז

א.  $f(e_G) = e_H$ .

ב.  $\forall g \in G \quad f(g^{-1}) = (f(g))^{-1}$ .

ג.  $\forall g \in G \quad \forall n \in \mathbf{Z} \quad f(g^n) = (f(g))^n$ .

4. יהי  $f: G \rightarrow H$  הומומורפיזם של חבורות:

א. תהי  $K$  חבורה חלקית של  $G$ . אז התמונה  $f(K)$  היא חבורה חלקית של  $H$ .

ב. תהי  $L$  חבורה חלקית של  $H$ . אז התמונה ההפוכה  $f^{-1}(L)$  היא חבורה חלקית של  $G$ .

ג.  $f$  חח"ע או"י אם  $\text{Ker}(f) = \{e\}$ .

5.א.  $\forall g \quad g \in g * H$

ב.  $\forall g, k \in G, k \in g * H \rightarrow k * H \subseteq g * H$

ג.  $\forall g, k \in G, k \in g * H \rightarrow k * H = g * H$

ד.  $\forall g, k \in G, [(g * H \cap k * H \neq \emptyset) \rightarrow (g * H = k * H)]$

ה.  $\forall g \quad a_g: H \rightarrow g * H$  היא פונקציה חח"ע ועל.

ו.  $G = \bigcup_{g \in G} g * H$

6. תהי  $H$  תת-חבורה כלשהי של חבורה סופית  $G$ . אז

$$[G : H] = \frac{|G|}{|H|}$$

7. אם  $H \leq G$  ו  $G$  חבורה סופית, אז  $|H|$  מחלק את  $|G|$ .

8 אם  $g \in G$  איבר מסדר סופי, אז  $\langle g \rangle = \{g^1, \dots, g^{o(g)-1}, g^{o(g)}\}$  ו- $|\langle g \rangle| = o(g)$

9. יהי  $g \in G$  איבר כלשהו. אז  
 א. אם  $o(g) = \infty$  אז  $(\langle g \rangle, *) \cong (\mathbb{Z}, +)$   
 ב. אם  $o(g) = n < \infty$  אז  $(\langle g \rangle, *) \cong (\mathbb{Z}_n, +)$

10. אם  $f(x), g(x) \in F[x]$  שני פולינומים כלשהם,  $g(x) \neq 0(x)$ , אז קיימים שני פולינומים יחידים  $q(x), r(x) \in F[x]$  כך שמתקיימות התכונות:

א.  $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$

ב.  $0 \leq \deg(r(x)) < \deg(g(x))$

11. נתונים שני פולינומים  $f(x), g(x) \in F[x]$ , א. אז קיים  $\gcd(f(x), g(x))$ . ב. אז קיימים  $a(x), b(x)$  כך שמתקיים  
 $a(x)f(x) + b(x)g(x) = \gcd(f(x), g(x))$ .