

רשימת משפטים למבחן מבנים תשעו.

1. לכל מספר שלם  $a$  ולכל מספר חיובי  $b$  מתקיים  
א. קיימים מספרים שלמים  $r$  ו  $q$  כך ש

$$a = bq + r, 0 \leq r < b$$

ב. ישנו זוג יחיד של המספרים  $r$  ו  $q$  שמקיימים את א'.

2 יהיו  $a, b$  שני שלמים שלפחות אחד מהם שונה מאפס. אז  
קיימים מספרים שלמים  $x, y$  כך ש-  $ax + by = \gcd(a, b)$ .

3. איבר  $[a]_n \in \mathbb{Z}_n$  הוא הפיך אם ורק אם  $\gcd(a, n) = 1$ .

4. תת-קבוצה  $H \neq \emptyset$  תהיה תת-חבורה אם ורק אם היא  
מקיימת:  $\forall a \in H \forall b \in H \quad ab^{-1} \in H$ .

5. יהי  $f: G \rightarrow H$  הומומורפיזם של חבורות. אז

א.  $f(e_G) = e_H$ .

ב.  $\forall g \in G \quad f(g^{-1}) = (f(g))^{-1}$ .

ג.  $\forall g \in G \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad f(g^n) = (f(g))^n$ .

6. יהי  $f: G \rightarrow H$  הומומורפיזם של חבורות:

א. תהי  $K$  חבורה חלקית של  $G$ . אז התמונה  $f(K)$  היא חבורה חלקית של  $H$ .

ב. תהי  $L$  חבורה חלקית של  $H$ . אז התמונה ההפוכה  $f^{-1}(L)$  היא חבורה חלקית של  $G$ .

ג.  $f$  חחייע או"י א  $\text{Ker}(f) = \{e\}$ .

- 7.א.\*  $\forall g \quad g \in g * H$
- ב.\*  $\forall g, k \in G, k \in g * H \rightarrow k * H \subseteq g * H$
- ג.\*  $\forall g, k \in G, k \in g * H \rightarrow k * H = g * H$
- ד.\*  $\forall g, k \in G, [(g * H \cap k * H \neq \emptyset) \rightarrow (g * H = k * H)]$
- ה.\*  $\forall g \quad a_g: H \rightarrow g * H$  היא פונקציה חחייע ועל.
- ו.\*  $G = \bigcup_{g \in G} g * H$

8. תהי  $H$  תת-חבורה כלשהי של חבורה סופית  $G$ . אז

$$[G : H] = \frac{|G|}{|H|}$$

9. אם  $H \leq G$  ו  $G$  חבורה סופית, אז  $|H|$  מחלק את  $|G|$ .

10. אם  $g \in G$  איבר מסדר סופי, אז  $\langle g \rangle = \{g^1, \dots, g^{o(g)-1}, g^{o(g)}\}$  ו  $|\langle g \rangle| = o(g)$

11. יהי  $g \in G$  איבר כלשהו. אז

א. אם  $o(g) = \infty$  אז  $(\langle g \rangle, *) \cong (\mathbb{Z}, +)$

ב. אם  $o(g) = n < \infty$  אז  $(\langle g \rangle, *) \cong (\mathbb{Z}_n, +)$

12. אם  $f(x), g(x) \in F[x]$  שני פולינומים כלשהם,  $g(x) \neq 0(x)$ , אז קיימים שני פולינומים יחידים  $q(x), r(x) \in F[x]$  כך שמתקיימות התכונות:

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x) \quad \text{א.}$$

$$0 \leq \deg(r(x)) < \deg(g(x)) \quad \text{ב.}$$