

רשימת משפטים למבחן מבנים תשעז.

1. לכל מספר שלם a ולכל מספר חיובי b מתקיים
א. קיימים מספרים שלמים r ו q כך ש

$$a = bq + r, 0 \leq r < b$$

ב. ישנו זוג יחיד של המספרים r ו q שמקיימים את א'.

2 יהיו a, b שני שלמים שלפחות אחד מהם שונה מאפס. אז
קיימים מספרים שלמים x, y כך ש- $ax + by = \gcd(a, b)$.

3. איבר $[a]_n \in \mathbb{Z}_n$ הוא הפיך אם ורק אם $\gcd(a, n) = 1$.

4. נגדיר יחס על אוסף כל החבורות: G מתיחסת ל H אם קיים
איזומורפיזם של G על H . הוכח כי היחס הוא יחס שקילות.

5. תת-קבוצה $H \neq \emptyset$ תהיה תת-חבורה אם ורק אם היא
מקיימת: $\forall a \in H \forall b \in H \quad ab^{-1} \in H$.

6. יהי $f: G \rightarrow H$ הומומורפיזם של חבורות. אז

א. $f(e_G) = e_H$.

ב. $\forall g \in G \quad f(g^{-1}) = (f(g))^{-1}$.

ג. $\forall g \in G \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad f(g^n) = (f(g))^n$.

7. יהי $f: G \rightarrow H$ הומומורפיזם של חבורות:

א. תהי K חבורה חלקית של G . אז התמונה $f(K)$ היא חבורה
חלקית של H .

ב. תהי L חבורה חלקית של H . אז התמונה ההפוכה $f^{-1}(L)$
היא חבורה חלקית של G .

ג. f חח"ע או"א $\text{Ker}(f) = \{e\}$.

- 8.א.* $\forall g \quad g \in g * H$
- ב.* $\forall g, k \in G, k \in g * H \rightarrow k * H \subseteq g * H$
- ג.* $\forall g, k \in G, k \in g * H \rightarrow k * H = g * H$
- ד.* $\forall g, k \in G, [(g * H \cap k * H \neq \emptyset) \rightarrow (g * H = k * H)]$
- ה.* $\forall g \quad a_g: H \rightarrow g * H$ היא פונקציה חחייע ועל.
- ו.* $G = \bigcup_{g \in G} g * H$

9. תהי H תת-חבורה כלשהי של חבורה סופית G . אז

$$[G : H] = \frac{|G|}{|H|}$$

10. אם $H \leq G$ ו G חבורה סופית, אז $|H|$ מחלק את $|G|$.

11. אם $g \in G$ איבר מסדר סופי, אז $\langle g \rangle = \{g^1, \dots, g^{o(g)-1}, g^{o(g)}\}$ ו $|\langle g \rangle| = o(g)$

12. יהי $g \in G$ איבר כלשהו. אז
א. אם $o(g) = \infty$ אז $(\langle g \rangle, *) \cong (\mathbb{Z}, +)$
ב. אם $o(g) = n < \infty$ אז $(\langle g \rangle, *) \cong (\mathbb{Z}_n, +)$

13. אם $f(x), g(x) \in F[x]$ שני פולינומים כלשהם, $g(x) \neq 0(x)$, אז קיימים שני פולינומים יחידים $q(x), r(x) \in F[x]$ כך שמתקיימות התכונות:

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x) \quad \text{א.}$$

$$0 \leq \deg(r(x)) < \deg(g(x)) \quad \text{ב.}$$