תרגיל   בחבורה

.1

תהי G חבורה כלשהי עם פעולה בינארית $*$. נבחר איבר $a \in G$ ונגדיר פעולה חדשה $x \circ y = y * a * x$. הוכח ש- G חבורה ביחס ל-$\circ$.

.2

תהי F שדה כלשהו. הוכח שהקבוצה $G := F^* \times F$ תהיה חבורה ביחס לפעולה $(a,b)*(c,d) := (ac, bc + c + d)$.

.3 הוכח שקבוצה $G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a,b,c \in \mathbf{R} \right\}$ היא חבורה ביחס לפעולה $A * B = A + B + AB$.

.4 מעל הקבוצה $\mathbf{R}$ נגדיר פעולה $*$ ע"י השוויון $x * y := \sqrt[3]{x^3 + y^3}$.
הוכח ש- $(\mathbf{R},*)$ חבורה.

.5 תהי $(G,*)$ חבורה כלשהי. נגדיר פעולה חדש $a\#b := b * a$.
הוכח ש $(G,\#)$ חבורה.

.6 נתונה הקבוצה $\mathbb{R} - \{-2\}$ עם הפעולה $x * y := xy + 2x + 2y + 2$. הוכח שהיא חבורה ביחס לפעולה.

.7

על הקבוצה $G = \mathbf{R} - \{-0.5\}$ מוגדרת פעולה $x * y = x + y + 2xy$. הוכח ש- $(G,*)$ חבורה.

.8 תהי F קבוצה של מספרים שלמים וזוגיים. נגדיר פעולה בינארית מעל F ע"י הנוסחה

$$x * y = \frac{(x-2)(y-2)}{2} + 2$$

הוכח או הפרך:

א. $(F,*)$ מונויד.

א. $(F,*)$ חבורה.

.9 תהי $(G,*,e)$ חבורה כלשהי. הוכח שאם לכל שני איברים $x, y \in G$ מתקיים $(x*y)^2 = x^2 * y^2$ אז G אבלית.

10. תהי A חבורה אבלית כלשהי. מעל הקבוצה $G=A\times\{1,-1\}$ נגדיר פעולה בינרית $(a,\alpha)*(b,\beta)=(ab^{\alpha},\alpha\beta)$. הוכח ש- $(G,*)$ היא חבורה.

11. תהי S קבוצה סופית כלשהי. מעל קבוצת-החזקה 2^{S} נגדיר פעולה בינרית $X\div Y=(X-Y)\cup(Y-X)$. הוכח ש- $(2^{S},\div)$ היא חבורה אבלית.

12

תהי $(G,*)$ חבורה כלשהי. תהי $P(G)$ קבוצת-החזקה של G.
לכל שתי תת-קבוצות A,B של G נגדיר $A*B:=\{a*b\,|\,a\in A,b\in B\}$.
א. הוכח ש- $(P(G),*)$ מונויד.
ב. מצא את כל האיברים ההפיכים של $(P(G),*)$.

13. מעל הקבוצה $G=\{x\in\mathbf{R}\,|\,x>0,x\neq 1\}$ מוגדרת פעולה בינארית $x*y=e^{(\ln x)\cdot(\ln y)}$ הוכח ש- G חבורה ביחס לפעולה $*$.

14. הוכח שאם כל איבר $a\in G$ של חבורה $(G,*,e)$ מקיים $a=a^{-1}$, אזי G קומוטטיבית.

15. הוכח שהקטע הממשי $(-1,\infty)$ הינו חבורה ביחס לפעולה $x*y=x+y+xy$.
האם זה חבורה קומוטטיבית (אבלית)? נמק את תשובתך.

16. תהי A חבורה אבלית כלשהי. מעל הקבוצה $G=A\times\{1,-1\}$ נגדיר פעולה בינרית $(a,\alpha)*(b,\beta)=(ab^{\alpha},\alpha\beta)$. הוכח ש- $(G,*)$ היא חבורה.