תרגיל הומומורפזם

1.בין פונקציות הבאות מצא את כל ההומומורפיזמים מ- $\mathbf{C}^*$ ל- $\mathbf{R}^*$.

א. $f(z)=|z|$. ב. $f(z)=\frac{1}{|z|}$. ג. $f(z)=1+|z|$. ד. $f(z)=2|z|$.

2.יהי K שדה כלשהו. הוכח שפונקציה $f_a(x)=ax, a\neq 0$ היא איזומורפיזם מ- $(K,+)$ ל $(K,+)$

3.לכל מספר ממשי $\alpha\in\mathbf{R}$ נגדיר מטריצה ממשית $M(\alpha)=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$. הוכח ש- M הומומורפיזם מחבורה $(\mathbf{R},+)$ לחבורה $\mathbf{GL}_2(\mathbf{R})$.

4.הוכח שאם $f:G\to H$ הומומורפיזם בין חבורות, אז

א. $f(e_G)=e_H$.

ב. $f(g^{-1})=f(g)^{-1} \quad \forall g\in G$.

ג. $f(g^m)=f(g)^m \quad \forall g\in G \forall m\in\mathbf{Z}$

ד. $f(F)\leq H \quad \forall F\leq G$

ה . $f^{-1}(F)\leq G \quad \forall F\leq H$.

5.הוכח שפונקציה $f:G\to G, f(g)=g^2$

תהיה הומומורפיזם אם ורק אם G חבורה אבלית.

6.הוכח שפונקציה $f:G\to G, f(g)=g^{-1}$

תהיה הומומורפיזם אם ורק אם G חבורה אבלית.

7.תהי G חבורה כלשהי. הוכח שלכל $g\in G$ הפונקציה $\varphi_g(x)=g^{-1}xg$ היא איזומורפיזם.

מ G ל G

8. תהי G חבורה כלשהי עם פעולה בינארית $*$. נבחר איבר $a\in G$ ונגדיר פעולה חדשה $x\circ y=x*a*y$. הוכח

א. G חבורה ביחס ל- $\circ$.

ב. הוכח שפונקציה $f(x):=x*a^{-1}$ היא איזומורפיזם מחבורה $(G,*)$ לחבורה $(G,\circ)$.

9.יהי $f:G\to H$ הומומורפיזם של חבורות סופיות. הוכח ש:

א. אם N תת-חבורה של G אזי $f(N)\le H$.

ב. אם $N\lhd H$ אזי $f^{-1}(N)\lhd G$.

10.נתונה חבורה $GL_2(\mathbf{Z}_3) \ge \left\{\pm\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\pm\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\pm\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix},\pm\begin{pmatrix}1&-1\\-1&-1\end{pmatrix}\right\} =: G$.

הראה שלכל $X\in G$ מתקיים $XX^T=\pm I_2$ ועל סמך זה הוכח שהפונקציה $f(X)=XX^T$ היא הומומורפיזם חבורות. מצא את הגרעין של f.

11.נתונה חבורה $G:=\left\{\begin{pmatrix}1&a&c\\0&1&b\\0&0&1\end{pmatrix} \middle| a,b,c\in\mathbf{Z}_3\right\}$.

א. הראה שהפונקציה $f:G\to\mathbf{Z}_3\times\mathbf{Z}_3$ המוגדרת ע"י הנוסחה $f\left(\begin{pmatrix}1&a&c\\0&1&b\\0&0&1\end{pmatrix}\right)=(a,b)$ היא הומומורפיזם חבורות.

ב. הראה שהגרעין של f שווה למרכז של G.

12.

תהי G חבורה סופית. לכל $x\in G$ נגדיר תמורה α_x של G על ידי $\forall g\in G, \alpha_x(g)=gx.$ בדוק כי הפונקציה $\alpha:G\to\mathbb{S}_{|G|}, x\to\alpha_x$ (הטווח הוא חבורת התמורות על |G| איברים) היא חח"ע. האם α היא הומומורפיזם של חבורות?

הוכחנו בכתה כי ההעתקה $g\to xg$. היא חח"ע ועל לכל x, (וקראנו לטענה תכונת הסודוקו). לכן α_x היא תמורה ו- α היא פונקציה $\alpha:G\to\mathbb{S}_{|G|}$ צריך לבדוק האם היא הומומורפיזם. $\alpha_{xy}(g)=g(xy)=(gx)y=\alpha_y(\alpha_x(g))\to\alpha_{xy}=\alpha_y\alpha_x$: לכן α איננה הומומורפיזם. נראה שהיא חח"ע. אם $f(x)=f(y)$ אז

$$\alpha(x)(e)=\alpha(y)(e)\to xe=ye\to x=y.$$

.13

1. יהי $f:G\rightarrow H$ הומומורפיזם של חבורות:

א. תהי L חבורה חלקית של H. אז התמונה ההפוכה $f^{-1}(L)$ היא חבורה חלקית של G.
ב. f חח"ע או"א Ker(f)={e}.

14. נניח כי נתון מצולע משוכלל (שוה צלעות ושוה זויות) בן n צלעות, ותהי D_n קבוצת כל האפשרויות לגזור את המצולע מתוך ניר ולהחזיר את המצולע חזרה לאותו מקום. נגדיר על הקבוצה את פעולת ההרכבה.

1. מצא חבורה מוכרת אחרת אשר D_3 איזומורפית אליה.
2. כמה איברים יש ב-D_n?
3. נניח כי יש הומומורפיזם חח"ע (ולא על) $D_m\rightarrow D_n$. מצא תנאי שהמספרים m,n צריכים לקיים.
4. נניח כי מתקיים התנאי שמצאת בסעיף הקודם. האם נובע קיום והמומורפיזם חח"ע $D_m\rightarrow D_n$?

$D_3=S_3$ ב. נשים את המצולע על עצמו, אז לקדקד הראשון יש n אפשרויות, ולשני יש רק 2 (מימין או משמאל) , ואח"כ אי אפשר לבחור כלום לכן יש 2n איברים. ג. התמונה של ההומומורפיזם היא ח"ח של הטוח, וכיון שהוא חח"ע (ותמיד על תמונתו), אז בעצם D_m היא ח"ח של D_n, ולכן על המספר 2m לחלק את המספר 2n או בעצם על m לחלק את n. ד. אם אכן m מחלק את n אז אפשר לציר את המצולע בעל מספר הצלעות הקטן יותר בתוך המצולע בעל מספר הצלעות הגדול יותר, כמו שמציירים (למשל) משולש שוה צלעות בתוך משושה שוה צלעות, ואז כל העתקה של המצולע הקטן יותר לעצמו גוררת העתקה של הגדול יותר לעצמו ולכן זהו הומומורפיזם חח"ע כדרוש.

15.הבט במטריצה $\begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ שהיא אבר $GL(C,2)$ (עם פעולת כפל מטריצות) א. מצא את הסדר שלה וסמן אותו n. נגדיר העתקה $f: Z_n \to GL(C,2)$ (כאשר בZ_n ישנה פעולת החבור מודולו n) על ידי $f(1) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. ב. בדוק כי f היא הומומורפיזם של חבורות.
ג. מצא את התמונה ההפוכה של החבורה החלקית $GL(R,2)$.

16.תהי $f: G \to H$ הומומורפיזם של חבורות:

א. תהי K חבורה חלקית של G. אז התמונה $f(K)$ היא חבורה חלקית של H.
ב. תהי L חבורה חלקית של H. אז התמונה ההפוכה $f^{-1}(L)$ היא חבורה חלקית של G.

17.(תכונת הסודוקו): נתונים חבורה G ואבר a בה. א. אז ההעתקה f:G→G המוגדרת על ידי f(x)=ax היא חח"ע ועל. ב. אז ההעתקה f:G→G המוגדרת על ידי f(x)=xa היא חח״ע ועל.

18.נתונה חבורה סופית G ונגדיר פונקציה f:G→G על ידי $f(x)=x^{-1}$.

א. הוכח כי f חח״ע ועל.
ב. האם f הומומורפיזם של חבורות? אם כן הוכח שכן ואם לא מצא דוגמא נגדית.
ג. נניח כי x הוא אבר של G בעל סדר 2. מהו f(x)?
ד. נניח כי מספר איברי G הוא זוגי. האם חיב להיות בG אבר מסדר 2?

הוכחת חח"עיות. $f(x)=f(y)\to x^{-1}=y^{-1}\to x^{-1}y=y^{-1}y=e\to xx^{-1}y=x\to y=x$.

הוכחת על, $x=(x^{-1})^{-1}=f(x^{-1})$. ב.

$f(xy)\to(xy)^{-1}=y^{-1}x^{-1}, f(x)f(y)=x^{-1}y^{-1}, y^{-1}x^{-1}\neq x^{-1}y^{-1}$ שויון היה גורר כי G חיבת להיות אבלית. ג. כיון ש x מסדר 2 אז נובע $xx=e\to x=x^{-1}=f(x)$. כלומר x נקודת שבת של f. ד. לפי הסעיף הקודם אבר הוא מסדר 2 אם ורק אם הוא נקודת שבת של f. ברור כי $f(f(x))=x$ ולכן f מגדירה זוגות של אברים ב-G, $\{x,f(x)\}$ וכן איברים בודדים שהם נקודות שבת. כיון שבG יש מספר זוגי של איברים, אז צריכים להיות מספר זוגי של נקודות שבת. כיון ש e היא נקודת שבת, אז חיבת להיות נקודת שבת נוספת שהיא אבר מסדר 2.

.19

א. נזכר כי GL(F,n) היא חבורת כל המטריצות ההפיכות nxn עם מקדמים ב-F. א. מצא הומומורפיזם של חבורות GL(F,n) →GL(F,n+1)

ב. האם ההומומורפיזם הוא חח"ע? האם הוא על?

ג. מצא הומומורפיזם של חבורות GL(Q,n) →GL(R,n) כאשר Q שדה הרציונלים ו- R שדה הממשיים.

ד. נניח כי g:F→K היא הכלה של שדות (F מוכל בK.). מצא הומומורפיזם של חבורות GL(F,n) →GL(K,n).

. ההומומורפיזם מוגדר על ידי $A\to f(A)=\begin{pmatrix}A&0\\0&1\end{pmatrix}$. כלומר מוספים מוסיפים למטריצה A שורה ועמודה שמכילות אפסים ברוב המקומות למעט 1 על האלכסון. כיון שבתוך f(A) רשומה A אז f אכן ח״ח. אבל ברור שאיננה על כיון שלא לכל מטריצה בGL(n,R) יש 1 על האבר באלכסון בשורה האחרונה f איננה על. ג.ד. פשוט רושמים כל מטריצה עם אותם איברים, שהם גם בשדה הקטן וגם בשדה הגדול.