תרגיל חוג שדה

1. יהי F שדה סופי כלשהו ותהי R תת-קבוצה לא ריקה כלשהי. הוכח שאם R סגורה ביחס לחיבור וכפל של השדה אזי R תת-שדה של F.

2.

יהי n מספר טבעי כלשהו. הוכח ש:

א. איבר $[a]_n \in \mathbf{Z}_n$ יהיה הפיך אם ורק אם $\gcd(a,n)=1$.

ב. חוג $\mathbf{Z}_n$ יהיה שדה אם ורק אם n מספר ראשוני.

3. הוכח כי Zn הוא חוג קומוטטיבי עם יחידה.

4. נתון חוג R. הוכח כי R ניתן לשכון בתוך חוג פולינומים.

5. יהי F שדה כלשהו ו- K תת-שדה שלו. נבחר סקלר $a \in F$ ונגדיר קבוצה $L=\{x+ya \mid x,y \in K\}$. אשר או סתור

א. אם $a^2 \in K$ אז L תת-שדה של F.

ב. $L=K$ אם ורק אם $a \in K$.

6. יהי F שדה כלשהו. נבחר סקלר $a \in F$ כלשהו ונגדיר R כקבוצה של כל המטריצות מהצורה $\begin{pmatrix} x & y \\ ay & x \end{pmatrix}$ כשאר $x,y \in F$. הוכח ש:

א. R תת-חוג קומוטטיבי של $M_2(F)$.

ב. R יהיה שדה אם ורק אם למשוואה $x^2=a$ אין פתרונות ב- F.

7. יהי R חוג כלשהו. אז

א. $\forall a\in R\ \forall b\in R\ \forall c\in R\ a+b=a+c \Leftrightarrow b=c$.

ב. $\forall a\in R\quad 0\cdot a=0$.

ג. $\forall a\in R\ \forall b\in R\ (-a)\cdot b=-(a\cdot b)$.

הערה: ניתן להסתמך אך ורק על אקסיומות החוג !!!

8. בדוק האם הקבוצות הבאות הן חוגים:

א. $A=\left\{\frac{a}{2^m}\ \mid\ a\in\mathbf{Z}, m\in\mathbf{Z}\right\}$ ביחס לפעולות חיבור וכפל של מספרים רציונאליים.

ב. $A=\{2z\ \mid\ z\in\mathbf{Z}\}$ ביחס לפעולות חיבור וכפל של מספרים שלמים.

ג. $A=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid\ a,b,d\in\mathbf{Z}, c\in 2\mathbf{Z}\right\}$ ביחס לפעולות חיבור וכפל של מטריצות.

ד. $A=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid\ a,b\in\mathbf{Z}\right\}$ ביחס לפעולות חיבור וכפל של מטריצות.

ה. . 2^A ביחס לפעולות חיתוך (כחיבור) ואיחוד (ככפל).

9. הוכח שקבוצת המטריצות המרוכבות $A=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \mid\ a,b\in\mathbf{C}\right\}$ היא חוג ביחס חיבור וכפל המטריצות. בדוק שכל איבר של A השונה מאפס הפיך.

10. יהיו $(R,\cdot,\circ),(S,\bullet,\odot)$ חוגים ונגדיר את החוג הנקרא הסכום הישר של R ושל S והמוגדר ונמסומן על ידי

$$(R\oplus S,\bullet)=\{(x,y),x\in R,y\in S,(x,y)\bullet(a,b)=(x\cdot a,y\bullet b),(x,y)(a,b)=(x\circ a,y\odot b)\}$$
.

א. בדוק כי $R\oplus S$ מקימת את אקסימות M1,M2,M3.

ב. נביט על שדה הממשיים $\mathbb{R}$ כעל חוג. האם החוג $\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$ איזומורפי לחוג C של המספרים המרוכבים?

11. נתון תחום שלמות S. נגדיר על הקבוצה $S\times(S-\{0\})$ יחס שקילות על ידי $[(a,b)\sim(c,d)]\leftrightarrow ad=bc$: ונגדיר את הקבוצה $Q(S)$ על ידי אוסף מחלקות השקילות. את המחלקה של (a,b) נסמן על ידי $\frac{a}{b}$

.

א. עבור המקרה Z=S זהה את הקבוצה $Q(\mathbb{Z})$.

נגדיר בקבוצה חבור וכפל על ידי: אם $(a,b)\in\frac{a}{b},(c,d)\in\frac{c}{d}$. אז $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ היא המחלקה של $(ad+bc,bd)$ ואז $\frac{a}{b}\frac{c}{d}$ היא המחלקה של (ac,bd).

עבור המקרה הכללי (כלומר S כלשהו)

ב. ב. מצא את איברי היחידה החבורי והכפלי של **החוג** $Q(S)$.

ג. ג. לכל מחלקה $\frac{a}{b}\neq 0$, מצא את ההפכי שלה.

ד. מצא הומומורפיזם חח"ע $S\to Q(S)$.

12.נתונים שני חוגים $(R,+_R,*_R),(S,+_S,*_S)$ ונגדיר את הסכום הישר של R ושל S על ידי הקבוצה $R\times S$ (המכפלה הקרטזית-אוסף כל הזוגות של איברים מR וS), ועל ידי הפעולות הבאות: $(x,y)+(y,b)=(x+_R a,y+_S b),(x,y)(y,b)=(x*_R a,y*_S b)$. נסמן את המבנה החדש ב $R\oplus S$.

א. הוכח כי אם S,R חוגים עם יחידה אז גם $R\oplus S$ הוא חוג עם יחידה.

ב. הוכח כי אם R וS חוגים מתחלפים אז גם $R\oplus S$ הוא חוג מתחלף.

ג. נניח כי גם R וגם S הם שדה הממשיים. האם $R\oplus S$ הוא שדה המרוכבים?

13.תת קבוצת האיברים ההפיכים בחוג מהווה תמיד שדה.

כן לא נמוק קצר

14.נתון חוג עם יחידה $(R,+,\cdot,0,1)$ ונגדיר על הקבוצה R פעולות בינריות חדשות על ידי: $x\oplus y=y+x, x\odot y=y\cdot x.$.

ד. הוכח כי $R^{op}=(R,\oplus,\odot,0,1)$ הוא חוג עם יחידה.

ה. תן דוגמא לחוג R שעבורו פונקצית הזהות $1:R\to R^{op}$ היא איזומורפיזם.,
נמק.

ו. תן דוגמא לחוג R שעבורו פונקצית הזהות $1:R\to R^{op}$ איננה איזומורפיזם.,
נמק.

15. הוכח שקבוצת המטריצות $\mathbf{H}=\left\{\left.\begin{pmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u}\end{pmatrix}\right| u,v\in\mathbf{C}\right\}$ היא תת-חוג של $M_2(\mathbf{C})$ שבו כל איבר שונה מאפס הפיך (כאן $\mathbf{C}$ הינו שדה של מספרים מרוכבים ו $\bar{u}$ הוא צמוד ל- u)

16.יהי F שדה כלשהו. הוכח שקבוצת המטריצות $S=\left\{\left.\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a\end{pmatrix}\right| a,b\in F\right\}$ היא תת-חוג קומוטטיבי של $M_2(F)$. הוכח S שדה אם ורק אם למשוואה $x^2-2=0$ אין פתרונות ב- F.

17.נתונה העתקה $f:R\to S$ בין חוגים אשר מקיימת את התכונות הראשונה והשניה של הומומורפיזם של חוגים, וידוע שנתונים אבר הפיך וההפכי הכפלי שלו $a,a^{-1}\in R$ המקיימים כי $f(a^{-1})=f(a)^{-1}$ האם $f:R\to S$ הוא הומומורפיזם של חוגים? נמק.