**המכללה האקדמית נתניה ע"ר**
**רח' האוניברסיטה 1**
**קרית יצחק רבין**
**נתניה 42365**

**NETANYA ACADEMIC COLLEGE (R"S)**
**1 University St.**
**Kiryat Yitzhak Rabin**
**NETANYA 42365, ISRAEL**

המכללה האקדמית נתניה

ביה"ס לניהול מערכות מידע

## **מבחן סוף במבוא למתמטיקה בדידה -סמסטר קיץ ה'תשע"ז.**

## **מועד א יום ג כז תשרי התשע"ח 17-10-2017**

- מורה: גיורא דולה, מתרגל: רענן שכטר.
- משך המבחן הוא שעתיים וחצי.
- אין להשתמש בחומר עזר.
- יש לבחור 5 שאלות מתוך 6.

**בהצלחה.**

עמותה רשומה 580242451 **Fax:** (972-9) 8844439 **:פקס** **Tel:** (972-9) 8607777 **:טל**

## שאלה 1

נביט בפסוק $G(p,q,r)$ המוגדר על ידי :

$$\begin{pmatrix} p & q & r & G(p,q,r) \\ T & T & T & T \\ T & T & F & F \\ T & F & T & T \\ T & F & F & F \\ F & T & T & T \\ F & T & F & F \\ F & F & T & F \\ F & F & F & F \end{pmatrix}$$

א. בטא אותו בצורת DNF .

ב. הוכח $G(p,q,r) \equiv (p \vee q) \wedge r$

ג. פשט את הפסוקים $G(p,p,r), G(p,-p,r)$

## שאלה 2

. א. נתונות הקבוצות $B = \{\{2,\phi\},\phi\}, A = \{2,\{\phi\},\phi\}$ מצא את הקבוצות הבאות :

1. $B \cap P(A)$
2. $P(A) - P(B)$
3. $P(B) \cup A$

ב. הוכח שלכל 3 קבוצות $A,B,C$ מתקיים $(A-B)\cup(C-B)=(A\cup C)-B$

. ג. הוכח או סתור (ע"י דוגמא נגדית ) : לכל שלוש קבוצות $A,B,C$ מתקיים $A \cup (B-C) = A \cup B$

שאלה 3.

.

א. מצא את הפונקציות $g \circ f$ ו $f \circ g$ כאשר $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ המוגדרות ע"י הנוסחאות $f(x)=x^2+1, g(x)=x+2$ .

ב. האם היחס הבינארי $h=\{(x,y)\in\mathbf{R}\times\mathbf{N} \mid y^2x^2-x=1\}$ הוא פונקציה? נמק את תשובתך.

שאלה 4

הוכח שפונקציה $f:\mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R}-\{1\}$ המוגדרת ע"י הנוסחה $f(x)=\dfrac{x}{x-2}$ הפיכה ומצא את ההפוכה שלה.

שאלה 5

יהיו $R,S\subseteq X\times X$ שני יחסים . הוכח או סתור (ע"י דוגמא נגדית).

א. אם $R$ ו $S$ יחסי שקילות (רפלקסיביים סימטריים וטרנזיטיביים) אז $R\cap S$ גם הוא יחס שקילות..

ב.. נציב $X=\{0,1,2,3,4,5\}$ ו $R=\{(x,y)\mid \frac{x-y}{3}\in\mathbf{Z}\}, S=\{(0,1),(1,2),(0,2),(3,3),(3,4),(3,5)\}$ .

כתוב את כל הזוגות של $R\circ S$. האם $R\circ S$ טרנזיטיבי ? נמק את תשובתך.

שאלה 6

6. מעל הקבוצה $A=\{1,2,4,8\}\times\{1,2,4,8\}$ נגדיר יחס על $A\times A$

$R=\{((a,b),(c,d))\in A\times A \mid \text{ad=bc}\}$ .

א. הוכח ש- $R$ יחס שקילות.

ב. מצא את $[(8,2)]_R$. כמה מחלקות שקילות יש?

<u>דף נוסחאות – מתמטיקה דיסקרטית</u>

## תורת הקבוצות:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $A \cap (A \cup B) = A$ | 19 | $A = B \Leftrightarrow \{x \in A \Leftrightarrow x \in B\}$ | 1 |
| $A \cup (A \cap B) = A$ | 20 | $A = B \Leftrightarrow \{(A \subseteq B) \cap (B \subseteq A)\}$ | |
| $A - B = A \cap \overline{B}$ | 21 | $A \cup B = \{x \rvert\ x \in A \ \cup\ x \in B\}$ | 2 |
| $A - \emptyset = A$ | 22 | $A \cap B = \{x \rvert\ x \in A \ \cap\ x \in B\}$ | 3 |
| $A - A = \emptyset$ | 23 | $A \times B = \{(a,b) \rvert\ a \in A \cap b \in B\}$ | 4 |
| $\emptyset - A = \emptyset$ | 24 | $A-B = \{x \rvert\ x \in A \ \cap\ x \notin B\}$ | 5 |
| $A-B=\emptyset \Leftrightarrow A \subseteq B$ | 25 | $\overline{A} = \{x \rvert\ x \notin A\}$ | 6 |
| $A \cup \overline{A} = U$ | 26 | $\lvert A \cup B\rvert = \lvert A\rvert + \lvert B\rvert - \lvert A \cap B\rvert$ | 7 |
| $A \cap \overline{A} = \emptyset$ | 27 | $x \notin A \Leftrightarrow x \in \overline{A}$ | 8 |
| $A \cup U = U$ | 28 | $A \cup B = B \cup A$ | 9 |
| $A \cap U = A$ | 29 | $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ | 10 |
| $\overline{\overline{A}} = A$ | 30 | $A \cup A = A$ | 11 |
| $\overline{\emptyset} = U$ | 31 | $A \cap A = A$ | 12 |
| $U - A = \overline{A}$ | 32 | $A \cup \emptyset = A$ | 13 |
| $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$ | 33 | $A \cap \emptyset = \emptyset$ | 14 |
| $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$ | 34 | $A \cap B = B \cap A$ | 15 |
| $\lvert P(A)\rvert = 2^n$ | 35 | $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ | 16 |
| | | $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ | 17 |
| $A \subseteq A \cup B$ | 36 | $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ | 18 |
| $A \cap B \subseteq A$ | 37 | | |

N – מספרים טבעים　Z – מספרים שלמים　Q – מספרים רציונאליים　R – מספרים ממשיים

$N \subset Z \subset Q \subset R$

<u>מכפלה קרטזית :</u>

$$A \times B = \{(a,b) \mid (a \in A) \wedge (b \in B)\}$$

<u>רפלקסיבי :</u>

$$\forall x \in A : (x,x) \in R$$

<u>סימטרי :</u>

$$\forall x, y \in A : (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$$

<u>טרנזיטיבי :</u>

$$\forall x, y, z \in A : (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$$

<u>פונקציות :</u>

<u>חח״ע :</u>

$$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

על :

$\forall y \in Y, \exists x \in X : y = f(x)$

פונקציה הפוכה : שלמה חח״ע ועל

## לוגיקה:

DNF ו CNF

| | |
|---|---|
| לשורות בהן התוצאה T | DNF = (∗ ∧ ∗) ∨ (∗ ∧ ∗) ∨ … |
| לשורות בהן התוצאה F | CNF = (∗ ∨ ∗) ∧ (∗ ∨ ∗) ∧ … |

חוקים:

1. חוק השלילה $\neg(\neg P) \equiv P$
2. חוק אידמפוטנטי $P \wedge P \equiv P, P \vee P \equiv P$ .
3. חוק אסוציאטיבי $P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R,$ $P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$ .
4. חוק קומוטטיבי $P \wedge Q \equiv Q \wedge P,$ $P \vee Q \equiv Q \vee P$ .
5. חוק דיסטריבוטיבי $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R),$ $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ .
6. חוק היחידה $P \wedge \mathrm{T} \equiv P,$ $P \vee \mathrm{F} \equiv P$ .
7. חוק השליטה $P \vee \mathrm{T} \equiv \mathrm{T},$ $P \wedge \mathrm{F} \equiv \mathrm{F}$ .
8. חוק המשלים $P \wedge \neg P \equiv \mathrm{F}$ $P \vee \neg P \equiv \mathrm{T}$ .
9. חוקי דה-מורגן $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q,$ $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$ .
10. חוקי הבליעה $P \vee (P \wedge Q) \equiv P,$ $P \wedge (P \vee Q) \equiv P$ .

11. $P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$
$P \Leftrightarrow Q \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$.

## טבלאות אמת

| $P$ | $Q$ | $P \wedge Q$ | $P \vee Q$ | $P \Rightarrow Q$ | $P \Leftrightarrow Q$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **T** | **T** | **T** | **T** | **T** | **T** |
| **T** | **F** | **F** | **T** | **F** | **F** |
| **F** | **T** | **F** | **T** | **T** | **F** |
| **F** | **F** | **F** | **F** | **T** | **T** |

## מחלקת שקילות

$[a]_R = \{x \in X \mid (a,x) \in R\} = \{x \in X \mid (x,a) \in R\}$.

## תשובות

### תשובה 1 א,ב

$$G(p,q,r)\equiv(p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge(-q)\wedge r)\vee((-p)\wedge q\wedge r)\equiv dist\equiv[(p\wedge q)\vee(p\wedge(-q))\vee((-p)\wedge q)]\wedge r$$
$$\equiv dist\equiv[[p\wedge[q\vee(-q))]\vee((-p)\wedge q)]\wedge r\equiv[[p\wedge[T]]\vee((-p)\wedge q)]\wedge r\equiv[p\vee((-p)\wedge q)]\wedge r$$
$$\equiv dist\equiv[(p\vee(-p))\wedge(p\vee q)]\wedge r\equiv[(T)\wedge(p\vee q)]\wedge r\equiv(p\vee q)\wedge r$$

### תשובה 1 ג

$$G(p,q,r)\equiv(p\vee q)\wedge r, G(p,p,r)\equiv(p\vee p)\wedge r\equiv p\wedge r, G(p,-p,r)\equiv(p\vee(-p))\wedge r\equiv T\wedge r\equiv r,$$

### תשובה 2

א. נחשב קודם את $P(A),P(B)$.

$$P(B)=\{\phi,\{\phi\},\{\{2,\phi\}\},B\}$$

וכעת $P(A)=\{\phi,\{\phi\},\{2\},\{\{\phi\}\},\{2,\phi\},\{2,\{\phi\}\},\{\{\phi\},\phi\},A\}$ :

1. $B\cap P(A)=B$
2. $P(A)-P(B)=P(A)=\{\{2\},\{\{\phi\}\},\{2,\phi\},\{2,\{\phi\}\},\{\{\phi\},\phi\},A\}$
3. $P(B)\cup A=\{\phi,\{\phi\},\{\{2,\phi\}\},B,2\}$

ב.

$$[x\in(A-B)\cup(C-B)]\equiv def \equiv[\{x\in(A-B)\}\vee\{x\in(C-B)\}]\equiv def$$
$$\equiv[(x\in A)\wedge(-(x\in B))]\vee[(x\in C)\wedge(-(x\in B))]$$
$$\equiv dist \equiv[(x\in A)\vee(x\in C)]\wedge(-(x\in B))\equiv def \equiv(x\in(A\cup C))\wedge(-(x\in B))\equiv def \equiv(x\in(A\cup C)-B)$$

ג נמצא דוגמא נגדית. אם $B\cap C\neq\phi$ . נקבל סתירה. למשל

$A=\{0,1\},C=\{1,2\},B=\{2,3\}\rightarrow B-C=\{3\}$ אז

$$A\cup(B-C)=\{0,1,3\}\neq A\cup B=\{0,1,2,3\}$$

תשובה 3

א $(g\circ f)(x)=f(g(x))=(g(x))^2+1=(x+2)^2+1=x^2+4x+5$

$$(f\circ g)(x)=g(f(x))=f(x)+2=x^2+1+2=x^2+3$$

ב. עלינו לבדוק את תכונת החח״ע, כלומר לכל $x\in\mathbf{R}$ מספר ה $y\in\mathbf{N}$ ביחס איננו עולה על 1ף ואכן $y^2x^2-x=1\rightarrow y^2=\frac{1+x}{x^2}\rightarrow y=\sqrt{\frac{1+x}{x^2}}$ . השורש נלקח בסימן חיובי כיון ש $y$ מוגדר להיות בקבוצת הטבעיים $\mathbf{N}$, ויש לכל היותר פתרון אחד למשואה.

תשובה 4

נבדק חח״ע-יות

$$f(a)=\frac{a}{a-2}=f(b)=\frac{b}{b-2}\rightarrow a(b-2)=b(a-2)\rightarrow ab-2a=ab-2b\rightarrow-2a=-2b\rightarrow 2a=2b\rightarrow a=b$$

נבדק על

$$f(a)=\frac{a}{a-2}=b\rightarrow a=b(a-2)\rightarrow a=ab-2b\rightarrow 2b=ab-a\rightarrow 2b=a(b-1)\rightarrow a=\frac{2b}{b-1}\rightarrow f^{-1}(x)=\frac{2x}{x-1}$$

תשובה 5

א. נוכיח רפלקסיביות. לכל $x\in X$ מתקיים $(x,x)\in R$ כיון ש R רפלקסיבי ומתקיים $(x,x)\in S$ כיון ש S רפלקסיבי ולכן $(x,x)\in R\cap S$ ולכן $R\cap S$ רפלקסיבי

נוכיח סימטריה. נתון $(x,y)\in R\cap S$ . לכן לפי ההגדרה $(x,y)\in R$ וגם $(x,y)\in S$
כיון ש R סימטרי נובע שמתקיים $(y,x)\in R$ כיון ש S סימטרי נובע שמתקיים
$(y,x)\in S$ ולכן לפי הגדרת החתוך נובע $(y,x)\in R\cap S$ ולכן $R\cap S$ סימטרי
נוכיח טרנזיטיביות. נתונים $(x,y),(y,z)\in R\cap S$ . לכן לפי ההגדרה $(x,y),(y,z)\in R$
וגם $(x,y),(y,z)\in S$ כיון ש R טרנזיטיבי נובע שמתקיים $(x,z)\in R$ כיון ש S
טרנזיטיבי נובע שמתקיים $(x,z)\in S$ ולכן לפי הגדרת החתוך נובע $(x,z)\in R\cap S$
ולכן $R\cap S$ טרנזיטיבי

**ב.**

$$R=\{(0,3),(0,0),(3,0),(3,3),(1,1),(1,4),(4,1),(4,4),(2,2),(2,5),(5,2),(5,5)\},$$
$$S=\{(0,1),(1,2),(0,2),(3,3),(3,4),(3,5)\},$$
$$R\circ S=\{(0,1),(0,2),(3,1),(3,2),(1,2),(4,2),(0,3),(0,4),(0,5),(3,3),(3,4),(3,5)\}$$

על ידי מעבר על כל ה144 מקרים נובע כי $R\circ S$ הוא סימטרי.

תשובה 6

א. נוכיח כי $R$ רפלקסיבי. בהנתן $(a,b)\in A$ נוכיח כי $((a,b),(a,b))\in R$ אבל באמת מתקיים $ab=ab$ כדרוש. נוכיח כי $R$ סימטרי. בהנתן $((a,b),(c,d))\in R$ נוכיח כי $((c,d),(a,b))\in R$ לפי הנתון $ad=bc$ ולפי חוקי המספרים נובע כי $cb=da$ כדרוש. . נוכיח כי $R$ טרנזיטיבי. בהנתן $((a,b),(c,d)),((c,d),(e,f))\in R$ נוכיח כי $((a,b),(e,f))\in R$ לפי הנתונים $ad=bc$ וגם ולפי הנתון נובע כי $cf=de$ נכפל את שני השויונים האחרונים ונקבל $acdf=bcde$ . נצמצם במספר החיובי $cd$ ונקבל $af=be$ כלומר $((a,b),(e,f))\in R$ ולכן $R$ טרנזיטיבי.

ב. נכתוב את כל מחלקות השקילות $[(4,1)]_R=[(8,2)]_R$

$[(8,8)]_R=[(4,4)]_R=[(2,2)]_R=[(1,1)]_R$ $\quad [(8,4)]_R=[(4,2)]_R=[(2,1)]_R$ $\quad [(8,1)]_R$

$[(4,8)]_R=[(2,4)]_R=[(1,2)]_R$ $\quad [(2,8)]_R=[(1,4)]_R$ ו $[(1,8)]_R$ סה"כ 7 מחלקות שקילות.