המכללה האקדמית נתניה ע"ר
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

NETANYA ACADEMIC COLLEGE (R"S)
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

המכללה האקדמית נתניה
ביה"ס לניהול מערכות מידע

מבחן סוף במבוא למתמטיקה בדידה -סמסטר קיץ ה'תשע"ז.

מועד ב יום ב ב כסלו התשע"ח 20-11-2017

- מורה: גיורא דולה, מתרגל: רענן שכטר.
- משך המבחן הוא שעתיים וחצי.
- אין להשתמש בחומר עזר.
- יש לבחור 5 שאלות מתוך 6.

בהצלחה.

עמותה רשומה 580242451 **Fax:** (972-9) 8844439 **:פקס** **Tel:** (972-9) 8607777 **:טל**

שאלה 1

נביט בפסוק $G(p,q,r)$ המוגדר על ידי:

$$\begin{pmatrix} p & q & r & G(p,q,r) \\ T & T & T & F \\ T & T & F & T \\ T & F & T & F \\ T & F & F & F \\ F & T & T & T \\ F & T & F & T \\ F & F & T & F \\ F & F & F & F \end{pmatrix}$$

א. בטא אותו בצורת DNF

ב. הוכח $G(p,q,r) \equiv q \wedge (-(r \wedge p))$

ג. פשט את הפסוקים $G(p,p,r), G(p,q,-p)$

שאלה 2

2 . א. נתונות הקבוצות $B = \{\{2,\phi\},\phi\}, A = \{2,\{\phi\},\phi\}$ מצא את הקבוצות הבאות:

$P(B) - P(A) \quad P(A-B) \quad P(B) \cap A$

ב. הוכח שלכל 3 קבוצות A,B,C מתקיים $A-(B \cup C) = (A-B)-C$

ג. הוכח או סתור (ע"י דוגמא נגדית): לכל שלוש קבוצות

A,B,C מתקיים $(A \cap B) - C = (A-C) \cap (B-C)$

שאלה 3.

.

א. מצא את הפונקציות $g\circ f$ ו $f\circ g$ כאשר $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ המוגדרות ע"י הנוסחאות $f(x)=x^2+1, g(x)=x^2+x$.

ב. האם היחס הבינארי $h=\{(x,y)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}\mid y^2x^2-x=1\}$ הוא פונקציה? נמק את תשובתך.

שאלה 4

הוכח שפונקציה $f:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}-\{1\}$ המוגדרת ע"י הנוסחה $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ הפיכה

ומצא את ההפוכה שלה.

שאלה 5

יהיו $R,S\subseteq X\times X$ שני יחסים . הוכח או סתור (ע"י דוגמא נגדית).

א. אם R ו S יחסי שקילות (רפלקסיביים סימטריים וטרנזיטיביים) אז $R\cup S$ גם הוא יחס שקילות..

ב.. נציב $X=\{1,2,3,4\}$ ו $R=\{(x,y)\mid \frac{x-y}{2}\in\mathbf{Z}\}, S=\{(x,y)\mid \frac{x-y}{3}\in\mathbf{Z}\}$.

כתוב את כל הזוגות של $R\circ S$. האם $R\circ S$ טרנזיטיבי ? האם הוא סימטרי? נמק את תשובתך.

שאלה 6

6. מעל הקבוצה $A=\{1,2,3,4\}\times\{1,2,3,4\}$ נגדיר יחס על $A\times A$

$R=\left\{\left((a,b),(c,d)\right)\in A\times A\mid \text{a+d=b+c}\right\}$.

א. הוכח ש- R יחס שקילות.

ב. מצא את $[(4,2)]_R$. כמה מחלקות שקילות יש?

דף נוסחאות – מתמטיקה דיסקרטית

תורת הקבוצות:

$A \cap (A \cup B) = A$	19	$A = B \Leftrightarrow \{x \in A \Leftrightarrow x \in B\}$	1
$A \cup (A \cap B) = A$	20	$A = B \Leftrightarrow \{(A \subseteq B) \cap (B \subseteq A)\}$	
$A - B = A \cap \overline{B}$	21	$A \cup B = \{x \mid x \in A \cup x \in B\}$	2
$A - \emptyset = A$	22	$A \cap B = \{x \mid x \in A \cap x \in B\}$	3
$A - A = \emptyset$	23	$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \cap b \in B\}$	4
$\emptyset - A = \emptyset$	24	$A-B = \{x \mid x \in A \cap x \notin B\}$	5
$A-B=\emptyset \Leftrightarrow A \subseteq B$	25	$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$	6
$A \cup \overline{A} = U$	26	$\|A \cup B\| = \|A\| + \|B\| - \|A \cap B\|$	7
$A \cap \overline{A} = \emptyset$	27	$x \notin A \Leftrightarrow x \in \overline{A}$	8
$A \cup U = U$	28	$A \cup B = B \cup A$	9
$A \cap U = A$	29	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	10
$\overline{\overline{A}} = A$	30	$A \cup A = A$	11
$\overline{\emptyset} = U$	31	$A \cap A = A$	12
$U - A = \overline{A}$	32	$A \cup \emptyset = A$	13
$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$	33	$A \cap \emptyset = \emptyset$	14
$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$	34	$A \cap B = B \cap A$	15
$\|P(A)\| = 2^n$	35	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	16
		$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	17
$A \subseteq A \cup B$	36	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	18
$A \cap B \subseteq A$	37		

N – מספרים טבעיים Z – מספרים שלמים Q – מספרים רציונאליים R – מספרים ממשיים

$N \subset Z \subset Q \subset R$

מכפלה קרטזית:

$$A \times B = \{(a,b) \mid (a \in A) \wedge (b \in B)\}$$

רפלקסיבי:

$$\forall x \in A: (x,x) \in R$$

סימטרי:

$$\forall x, y \in A: (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$$

טרנזיטיבי:

$$\forall x, y, z \in A: (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$$

פונקציות:
חח"ע:

$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

על:

$\forall y \in Y, \exists x \in X : y = f(x)$

פונקציה הפוכה: שלמה חח"ע ועל

לוגיקה:

DNF ו CNF

לשורות בהן התוצאה T	DNF = (∗ ∧ ∗) ∨ (∗ ∧ ∗) ∨ …
לשורות בהן התוצאה F	CNF = (∗ ∨ ∗) ∧ (∗ ∨ ∗) ∧ …

חוקים:

1. חוק השלילה $\neg(\neg P) \equiv P$
2. חוק אידמפוטנטי $P \wedge P \equiv P, P \vee P \equiv P$.
3. חוק אסוציאטיבי $\begin{matrix} P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R, \\ P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R \end{matrix}$.
4. חוק קומוטטיבי $\begin{matrix} P \wedge Q \equiv Q \wedge P, \\ P \vee Q \equiv Q \vee P \end{matrix}$.
5. חוק דיסטריבוטיבי $\begin{matrix} P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R), \\ P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \end{matrix}$.
6. חוק היחידה $\begin{matrix} P \wedge \mathrm{T} \equiv P, \\ P \vee \mathrm{F} \equiv P \end{matrix}$.
7. חוק השליטה $\begin{matrix} P \vee \mathrm{T} \equiv \mathrm{T}, \\ P \wedge \mathrm{F} \equiv \mathrm{F} \end{matrix}$.
8. חוק המשלים $\begin{matrix} P \wedge \neg P \equiv \mathrm{F} \\ P \vee \neg P \equiv \mathrm{T} \end{matrix}$.
9. חוקי דה-מורגן $\begin{matrix} \neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q, \\ \neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q \end{matrix}$.

10. חוקי הבליעה $P \vee (P \wedge Q) \equiv P,$ $P \wedge (P \vee Q) \equiv P$.

11. $P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$ $P \Leftrightarrow Q \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$.

טבלאות אמת

$P \Leftrightarrow Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	Q	P
T	**T**	**T**	**T**	**T**	**T**
F	**F**	**T**	**F**	**F**	**T**
F	**T**	**T**	**F**	**T**	**F**
T	**T**	**F**	**F**	**F**	**F**

מחלקת שקילות

$[a]_R = \{x \in X \mid (a,x) \in R\} = \{x \in X \mid (x,a) \in R\}$.

תשובות

תשובה 1 א,ב

$$G(p,q,r) \equiv (p \wedge q \wedge (-r)) \vee ((-p) \wedge q \wedge r) \vee ((-p) \wedge q \wedge (-r)) \equiv comm, dist \equiv$$
$$q \wedge [(p \wedge (-r)) \vee ((-p) \wedge r) \vee ((-p) \wedge (-r))]$$
$$\equiv dist \equiv q \wedge [(p \wedge (-r)) \vee (-p) \wedge [r \vee -r]] \equiv q \wedge [(p \wedge (-r)) \vee (-p) \wedge T] \equiv q \wedge [(p \wedge (-r)) \vee (-p)]$$
$$\equiv dist \equiv q \wedge [(p \vee (-p)) \wedge ((-r) \vee (-p))] \equiv q \wedge [(T) \wedge ((-r) \vee (-p))] \equiv$$
$$q \wedge [(-r) \vee (-p)] \equiv DM = q \wedge (-(r \wedge p))$$

תשובה 1 ג

$$G(p,q,r)\equiv q\wedge(-(r\wedge p)), G(p,p,r)\equiv p\wedge(-(r\wedge p))\equiv p\wedge[(-r)\vee(-p)]\equiv$$
$$[p\wedge(-r)]\vee[p\wedge(-p)]\equiv[p\wedge(-r)]\vee[F]\equiv[p\wedge(-r)]$$
$$, G(p,q,-p)\equiv q\wedge(-(-p\wedge p))\equiv q\wedge(-(F))\equiv q\wedge T\equiv q$$

תשובה 2

א. נחשב קודם את $P(A),P(B)$.

$P(A)=\{\phi,\{\phi\},\{2\},\{\{\phi\}\},\{2,\phi\},\{2,\{\phi\}\},\{\{\phi\},\phi\},A\}$ וכעת :

$$P(B)-P(A)=\{\{\{2,\phi\}\},\{\{2,\phi\},\phi\}\}$$

$$P(A-B)=P(\{2,\{\phi\}\})=\{\phi,\{\{\phi\}\},\{\{2,\{\phi\}\}\},\{2\}\}$$

$$P(B)\cap A=\{\phi,\{\phi\}\}$$

ב.

$$[x\in A-(B\cup C)]\equiv def\ \equiv[(x\in A)\wedge(-(x\in(B\cup C))]\equiv def$$
$$\equiv[(x\in A)\wedge(-((x\in B)\vee(x\in C)))]\equiv dm\equiv[(x\in A)\wedge\{(-(x\in B))\wedge(-(x\in C))\}]$$
$$\equiv ass\equiv[\{(x\in A)\wedge(-(x\in B))\}\wedge(-(x\in C))]\equiv def\ \equiv[x\in(A-B)\wedge(-(x\in C))]$$
$$def\ \equiv[x\in(A-B)-C]$$

ג.

$$[x\in(A\cap B)-C]\equiv def\ \equiv[(x\in A\cap B)\wedge(-(x\in C))]\equiv def$$
$$\equiv[(x\in A)\wedge(x\in B)\wedge(-(x\in C))]\equiv idm\equiv[(x\in A)\wedge(x\in B)\wedge(-(x\in C))\wedge(-(x\in C))]$$
$$\equiv comm\equiv[(x\in A)\wedge(-(x\in C))\wedge(x\in B)\wedge(-(x\in C))]\equiv$$
$$[[(x\in A)\wedge(-(x\in C))]\wedge[(x\in B)\wedge(-(x\in C))]\equiv def\ \equiv$$
$$(x\in A-C)\wedge(x\in B-C)\equiv def\ \equiv[x\in(A-C)\cap(B-C)]$$

תשובה 3

א $(g\circ f)(x)=f(g(x))=(g(x))^2+1=(x^2+x)^2+1=x^4+2x^3+x^2+1$

$$(f\circ g)(x)=g(f(x))=f(x)^2+f(x)=(x^2+1)^2+(x^2+1)=x^4+2x^2+1+x^2+1=x^4+3x^2+2$$

ב. עלינו לבדוק את תכונת החח"ע, כלומר לכל $x\in\mathbf{R}$ מספר ה $y\in\mathbf{R}$ ביחס איננו עולה על 1 אבל $y^2x^2-x=1\to y^2=\frac{1+x}{x^2}\to y=\pm\sqrt{\frac{1+x}{x^2}}$. ולכן יש שני פתרונות למשואה וזו לא פונקציה.

תשובה 4

נבדק חח"ע-יות

$$f(a)=\frac{a+1}{a-1}=f(b)=\frac{b+1}{b-1}\to(a+1)(b-1)=(b+1)(a-1)\to ab-a+b-1=ab-b+a-1$$
$$\to 2a=2b\to a=b$$

נבדק על

$$f(a)=\frac{a+1}{a-1}=b\to a+1=b(a-1)\to a+1=ab-b\to 2b=ab-a\to b+1=a(b-1)\to a=\frac{b+1}{b-1}\to f^{-1}(x)=\frac{x+1}{x-1}=f(x)$$

תשובה 5

א. נוכיח רפלקסיביות. לכל $x\in X$ מתקיים $(x,x)\in R$ כיון ש R רפלקסיבי ומתקיים $(x,x)\in S$ כיון ש S רפלקסיבי ולכן $(x,x)\in R\cup S$ ולכן $R\cup S$ רפלקסיבי

נוכיח סימטריה. נתון $(x,y)\in R\cup S$. לכן לפי ההגדרה $(x,y)\in R$ או $(x,y)\in S$.

אם $(x,y)\in R$ וכיון ש R סימטרי נובע שמתקיים $(y,x)\in R$ ולכן $(y,x)\in R\cup S$

$(x,y)\in S$ וכיון ש S סימטרי נובע שמתקיים $(y,x)\in S$ ולכן לפי הגדרת החתוך נובע $(y,x)\in R\cup S$ ולכן $R\cup S$ סימטרי

נראה שטרנזיטיביות. לא בהכרח קיימת על ידי דוגמא נגדית. נניח כי $R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,3),(1,3)\}$ וכי $S=\{((2,2),(3,3),(4,4),(2,3),(3,4),(2,4)\}$

אז $(1,3),(3,4)\in R\cup S$. אבל $(1,4)\notin R\cup S$

ב.

$$R=\{(1,1),(1,3),(3,1),(3,3),(2,2),(2,4),(4,2),(4,4)\},$$
$$S=\{(1,1),(1,4),(4,1),(4,4),(2,2),(3,3)\},$$
$$R\circ S=\{(1,1),(1,4),(3,1),(3,4),(2,2),(4,2),(1,3),(3,3),(2,1),(2,4),(4,1),(4,4)\}$$

היחס איננו טרנזיטיבי כיון ש $(2,1),(1,3)\in R\circ S,(2,3)\notin R\circ S$ היחס איננו סימטרי כיון ש $(2,1)\in R\circ S,(1,2)\notin R\circ S$

תשובה 6

א. נוכיח כי R רפלקסיבי. בהנתן $(a,b)\in A$ נוכיח כי $((a,b),(a,b))\in R$ אבל באמת מתקיים $a+b=a+b$ כדרוש. נוכיח כי R סימטרי. בהנתן $((a,b),(c,d))\in R$ נוכיח כי $((c,d),(a,b))\in R$ לפי הנתון $a+d=c+b$ ולפי חוקי המספרים נובע כי $c+b=a+d$ כדרוש. .
נוכיח כי R טרנזיטיבי. בהנתן $((a,b),(c,d)),((c,d),(e,f))\in R$ נוכיח כי $((a,b),(e,f))\in R$ לפי הנתונים $a+d=c+b$ וגם ולפי הנתון נובע כי $c+f=d+e$ נחבר את שני השויונים האחרונים ונקבל $a+c+d+f=b+c+d+e$. נצמצם במספר החיובי $c+d$ ונקבל $a+f=b+e$ כלומר $((a,b),(e,f))\in R$ ולכן R טרנזיטיבי.

ב. נכתוב את כל מחלקות השקילות $[(4,2)]_R=[(3,1)]_R$

$[(4,4)]_R=[(3,3)]_R=[(2,2)]_R=[(1,1)]_R$ $\quad[(4,3)]_R=[(3,2)]_R=[(2,1)]_R$ $\quad[(4,1)]_R$

$[(1,2)]_R = [(2,3)]_R = [(3,4)]_R$ $[(1,3)]_R = [(2,4)]_R$ ו $[(1,4)]_R$ סה"כ 7 מחלקות שקילות.