המכללה האקדמית נתניה

המחלקה לניהול מערכות מידע

דוגמא בחינה ביסודות מתמטיקה בדידה

1.

p	q	r	$F(p,q,r)$
T	T	T	F
T	T	F	F
T	F	T	F
T	F	F	T
F	T	T	T
F	T	F	T
F	F	T	T
F	F	F	T

א. מצא פסוק בצורת CNF עבור $F(p,q,r)$

ב. הוכח : $F(p,q,r)\equiv\neg(p\wedge(q\vee r))$.

ג. פשט את הפסוקים $F(p,p,q)$, $F(\neg p,\neg q,\neg q)$.

תשובה לשאלה 1

א. עוברים על כל האיברים בעלי תשובה F ופועלים לפי מה שלמדנו ומקבלים $(-p\vee -q\vee -r)\wedge(-p\vee -q\vee r)\wedge(-p\vee q\vee -r)$. ב.

ב. נשתמש בחק הפלוג ונקבל $(-p)[\vee(-q\vee -r)\wedge(-q\vee r)\wedge(q\vee -r)]$ נשתמש בחוק פלוג בתוך הסוגרים ונקבל

$$(-p)\vee[(-q)\vee[(-r)\wedge r]\wedge(q\vee -r)]\equiv(-p)\vee[(-q)\vee[F]\wedge(q\vee -r)]\equiv(-p)\vee[(-q)\wedge(q\vee -r)]\equiv$$

$$(-p)\vee[[(-q)\wedge(q)]\vee[(-q)\wedge(-r)]]\equiv(-p)\vee[F\vee[(-q)\wedge(-r)]]\equiv(-p)\vee[(-q)\wedge(-r)]\equiv$$

$$(-p)\vee -[q\vee r]\equiv -(p\wedge(q\vee r))$$

ג. $F(p,p,q)\equiv -(p\wedge(p\vee q))\equiv -p$,
$F(p,q,r)\equiv \neg(p\wedge(q\vee r)), F(-p,-p,-q)\equiv -(-p\wedge(-p\vee -q))\equiv -(-p)=p$

2. א. נתונות קבוצות $B=\{1,\{1\},\phi\}, A=\{\{1,\phi\},\phi\}$ מצא את הקבוצות הבאות :

1. $A\cup P(B)$
2. $P(A)\cap P(B)$
3. $P(B)-A$

ב. הוכח או סתור על ידי דוגמא נגדית : לכל 2 קבוצות A,B מתקיים
$A-(B\cap A)=A-B$.

ג. הוכח או סתור על ידי דוגמא נגדית :
$(A-B)\cup(C-D)=(A\cup C)-(B\cap D)$

תשובה 2

$, A=\{\{1,\phi\},\phi\}, P(A)=\{\phi,\{\phi\},\{\{1,\phi\}\},\{\{1,\phi\},\phi\}\}, P(B)=\{\phi,\{1\},\{\{1\}\},\{\phi\},\{1,\phi\},\{1,\{1\}\},\{\{1\},\phi\},\{1,\{1\},\phi\}\}$

א-1 A מוכלת ב $P(B)$ ולכן האחוד הוא $P(B)$.

א-2 קבוצת החתוך הם האיברים המשותפים $P(A)\cap P(B)=\{\phi,\{\phi\}\}$

א-3 $P(B)-A=P(B)=\{\{1\},\{\{1\}\},\{\phi\},\{1,\{1\}\},\{\{1\},\phi\},\{1,\{1\},\phi\}\}$

ב. נוכיח לפי חוקי הלוגיקה

$x\in B)])]\equiv[(x\in A)\wedge([(x\notin A)\vee(x\notin B)])\equiv[(x\in A)\wedge(x\notin A)]\vee[(x\in A)\wedge(x\notin B)]\equiv(x\in\phi)\vee(x\in A-B)\equiv$

ג. דוגמא נגדית

$A=\{1,2,3\}, B=\{3\}, C=\{4,5,6\}, D=\{4\}, A-B=\{1,2\}.C-D=\{5,6\}, (A-B)\cup(C-D)=\{1,2,5,6\},$
$C)-(B\cap D)=\{1,2,3,4,5,6\}$

3. א. מצא את הפונקציות $g\circ f$ ו $f\circ g$ כאשר $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ מוגדרות ע"י הנוסחאות $f(x)=2x-1, g(x)=x^2-2x+1$.

ב. האם היחס הבינארי $h=\{(x,y)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}\mid y^2x+x=2\}$ הוא פונקציה? נמק את תשובתך.

ג. . הוכח שהיא הפיכה ומצא את ההפוכה שלה

$f:\mathbf{R}-\{2\}\to\mathbf{R}-\{2\}$ המוגדרת ע"י הנוסחה $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-2}$;

תשובה 3

3. א

$$1=4x^2-4x+1-4x+2+1=4x^2-8x+4, (g\circ f)(x)=f(g(x))=2g(x)-1=2(x^2-2x+1)-1=2x^2-4x+1$$

3.ב נציב $x=1$ נקבל $y^2+1=2\to y^2=1\to y=\pm 1$ כלומר מתקבלים שני y שונים

עבור $x=1$ ולכן אין חד ערכיות ואין זו פונקציה

3. ג נוכיח חח"עיות

$$a-1)(b-2)=(2b-1)(a-2)\to 2ab-4b-a+2=2ab-4a-b+2\to -4b-a=-4a-b\to 3b=3a\to b=a$$

נוכיח על

$$x-2y=2x+1\to yx-2x=2y+1\to x(y-2)=2y+1\to x=\frac{2y+1}{y-2}\to f^{-1}(x)=\frac{2x+1}{x-2}:\mathbf{R}-\{2\}\to\mathbf{R}-\{2\}$$

4. א. במקרה של $X=Y=\{1,2,3,4,5\}$ ו

$R=\{(x,y)\mid 0\le x-y\le 1\}, S=\{(x,y)\mid 5\le x+y\le 6\}$

כתוב את כל הזוגות של $R\circ S$. האם $R\circ S$ טרנזיטיבי ? נמק את תשובתך.

תשובה 4

4.א

$\ldots),(2,1),(2,2),(3,2),(3,3),(4,3),(4,4),(5,4),(5,5)\}S=\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1),(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$

$\ldots 1,4),(1,5),(2,5),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(3,2),(4,2),(4,3),(4,1),(5,1),(5,2)\}$

דרך אחרת:

$\ldots \mid 0\le x-y\le 1\}, S=\{(x,y)\mid 5\le x+y\le 6\}, (x,y)\in R\to (x=y)\vee(x=y+1)\to (x,z)\in R\circ S\to x+z=5,6,7$

$R\circ S$ אינו טרנזיטיבי כי

$\ldots),(2,1),(2,2),(3,2),(3,3),(4,3),(4,4),(5,4),(5,5)\}S=\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1),(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$

$\ldots 1)\in R\circ S,(1,1)\notin R\circ S$

5. תהי A קבוצה לא ריקה של מספרים שלמים. מעל הקבוצה A נגדיר יחס בינארי

$R=\{(x,y)\in A^2 \mid$ ללא שארית - ב 5 מתחלק $x-y\}$.

ב. הוכח ש-R יחס שקילות.

ג. במקרה $A=\{1,\ldots,10\}$ מצא את מחלקות השקילות

תשובה: א. היחס רפלקסיבי כי $x-x=5\cdot 0\to (x,x)\in R$. היחס סימטרי כי

$(x,y)\in R\to x-y=5\cdot a\to y-x=5\cdot(-a)\to (y,x)\in R$ היס טרנזיטיבי כי

$(x,y),(y,z)\in R\to x-y=5\cdot a, y-z=5\cdot b\to x-z=(x-y)+(y-x)=5\cdot a+5\cdot b=5(a+b)\to (x,z)\in R$

ב. מחלקות השקילות הן $\{1,6\},\{2,7\},\{3,8\},\{4.9\},\{5,10\}$