

סיכום ההרצאות בנושא לוגיקה

הקובץ הזה מכיל רק הסיכומים. החומר המלא ניתן למצוא בספרים הבאים (הספרים ישנם בספרייה)

1. נתי ליניאל, מיכל פרנס, מתמטיקה בדידה, עמודים 50-76.
2. שי גירון, שוני דר, מתמטיקה בדידה, עמודים 9-18.

הגדרה. פסוק הוא קביעה כלשהי, שיש לה ערך אמת. במילים אחרות, פסוק הוא משפט שיש לו ערך אמת **T** או **F**.

למשל, המשפטים "לונדון היא בירת צרפת", "ישנם אנשים דוברי ספרדית" הם פסוקים (הראשון שקרי והשני אמת).

המשפטים "מה השעה?", "תסגור את הדלת" אינם פסוקים.

קשרים לוגיים בסיסיים

קשר השלילה (**negation, NOT**) \neg .
טבלת האמת של $\neg P$

P	$\neg P$
F	T
T	F

קשר "וגם" או "קוניונקציה" (**conjunction, AND**) \wedge .
טבלת האמת של \wedge :

P	Q	$P \wedge Q$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

קשר "או" או "דיסיונקציה" (**disjunction, OR**) \vee .
טבלת האמת של \vee :

P	Q	$P \vee Q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

קשר הגרירה \leftarrow (**implication**). הפסוק $Q \leftarrow P$ נקרא "אם P אז Q ", " P גורר Q ", " Q נובע מ- P ", " P תנאי מספיק ל- Q ", " Q תנאי הכרחי ל- P ".

טבלת האמת של הגרירה:

P	Q	$P \rightarrow Q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

קשר גרירה דו-צדדית \leftrightarrow (two sided implication).
 הפסוק $Q \leftrightarrow P$ נקרא "P אם ורק אם Q", "P הוא תנאי הכרחי ומספיק עבור Q".
 טבלת האמת של \leftrightarrow :

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

שקילות בין הפסוקים

פסוק מורכב (או **נוסחה לוגית**) הינו פסוק שבנוי מהפסוקים **האטומים** ע"י קשרים לוגיים. למשל, הפסוק $(P \rightarrow Q) \vee (\neg Q \wedge R)$ מורכב מהפסוקים האטומים P, Q, R.

שני פסוקים מורכבים נקראים **שקולים** כאשר יש להם אותם ערכי אמת, עבור כל האפשרויות של ערכי אמת של הפסוקים האטומים המופיעים בהם. במילים אחרות: שני פסוקים שקולים אם טבלאות האמת שלהם זהות.

דוגמא. נבדוק ש- $P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$.

P	Q	$P \rightarrow Q$	$\neg P \vee Q$
F	F	T	T
F	T	T	T
T	F	F	F
T	T	T	T

פסוק מורכב (=נוסחה לוגית) נקרא **טאוטולוגיה** כאשר הוא מקבל ערך אמת T עבור כל הצבה של המשתנים שלו.
 פסוק מורכב (=נוסחה לוגית) נקרא **סתירה** כאשר הוא מקבל ערך אמת F עבור כל הצבה של המשתנים שלו.

דוגמאות. מטבלאות האמת הבאות ניתן לראות שהפסוק $P \vee \neg P$ הוא טאוטולוגיה והפסוק $P \wedge \neg P$ סתירה.

P	$P \vee \neg P$	$P \wedge \neg P$
F	T	F
T	T	F

חוקים של לוגיקה בוליאנית

1. חוק השלילה $\neg(\neg P) \equiv P$

2. חוק אידמפוטנטי $P \wedge P \equiv P, P \vee P \equiv P$

$$P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R, \quad \text{3. חוק אסוציאטיבי}$$

$$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$$

$$P \wedge Q \equiv Q \wedge P, \quad \text{4. חוק קומוטטיבי}$$

$$P \vee Q \equiv Q \vee P$$

$$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R), \quad \text{5. חוק דיסטריבוטיבי}$$

$$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

$$P \wedge T \equiv P, \quad \text{6. חוק היחידה}$$

$$P \vee F \equiv P$$

$$P \vee T \equiv T, \quad \text{7. חוק השליטה}$$

$$P \wedge F \equiv F$$

$$P \wedge \neg P \equiv F, \quad \text{8. חוק המשלים}$$

$$P \vee \neg P \equiv T$$

$$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q, \quad \text{9. חוקי דה-מורגן}$$

$$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$$

$$P \vee (P \wedge Q) \equiv P, \quad \text{10. חוקי הבליעה}$$

$$P \wedge (P \vee Q) \equiv P$$

$$P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$$

$$P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) \quad \text{11.}$$

דוגמת הוכחת שקילות ע"י חוקיים הלוגיים

נוכיח ש- $(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R) \equiv Q \rightarrow (P \rightarrow R)$.

מחוק 11 אנו מקבלים:

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R) \equiv \neg(\neg P \vee Q) \vee (\neg P \vee R)$$

לפי חוק דה-מורגן (9):

$$\neg(\neg P \vee Q) \vee (\neg P \vee R) \equiv (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \vee R)$$

לפי החוק האסוציאטיבי (3):

$$(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \vee R) \equiv ((P \wedge \neg Q) \vee \neg P) \vee R$$

לפי החוק הדיסטריבוטיבי (5):

$$((P \wedge \neg Q) \vee \neg P) \vee R \equiv ((P \vee \neg P) \wedge (\neg Q \vee \neg P)) \vee R$$

לפי חוק המשלים (8): $(P \vee \neg P) \equiv T$. לכן

$$((P \vee \neg P) \wedge (\neg Q \vee \neg P)) \vee R \equiv (T \wedge (\neg Q \vee \neg P)) \vee R \equiv (\neg Q \vee \neg P) \vee R$$

לפי החוק האסוציאטיבי (3):

$$(\neg Q \vee \neg P) \vee R \equiv \neg Q \vee (\neg P \vee R) \stackrel{(11)}{\equiv} Q \rightarrow (P \rightarrow R)$$

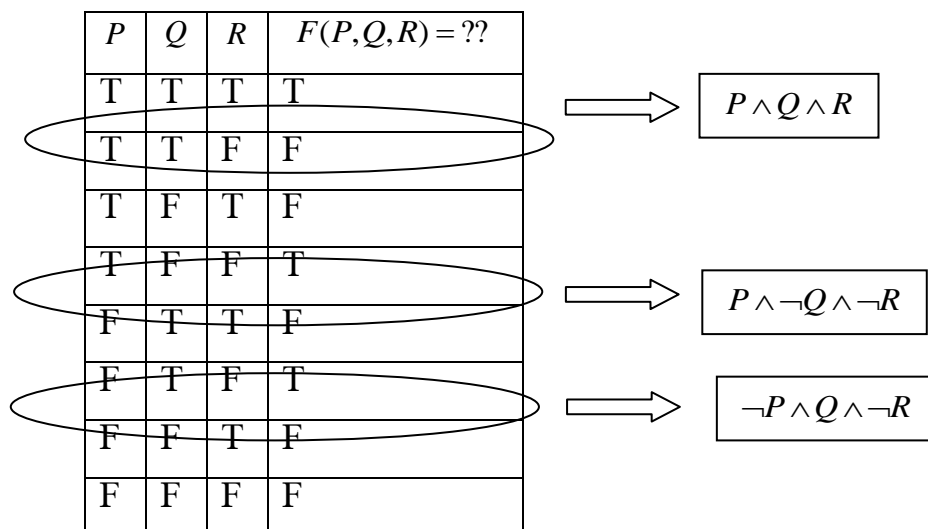
מ.ש.ל.

צורת DNF ו CNF

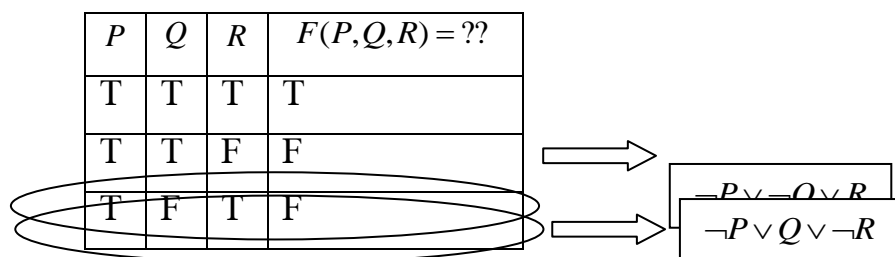
נביט בשאלה איך לבנות נוסחה לוגית (פסוק מורכב) לפי טבלת האמת הנתונה. ניקח כדוגמה את הטבלה הבאה:

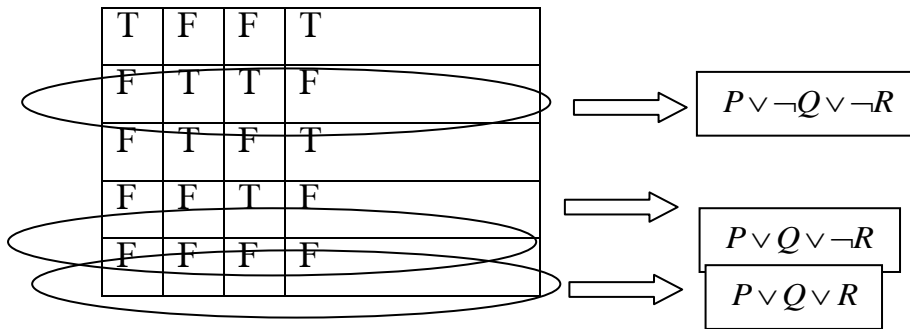
P	Q	R	$F(P,Q,R) = ??$
T	T	T	T
T	T	F	F
T	F	T	F
T	F	F	T
F	T	T	F
F	T	F	T
F	F	T	F
F	F	F	F

בניית פסוק $F(P,Q,R)$ בצורה דיסיונקטיבית נורמלית (disjunctive normal form, DNF)



הפסוק הסופי שווה ל $F(P,Q,R) = (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R)$.
 בניית פסוק $F(P,Q,R)$ בצורה קוניונקטיבית נורמלית (conjunctive normal form, CNF)





הפסוק הסופי שווה ל

$$F(P, Q, R) = (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee Q \vee R)$$

פרדיקטים וכמתים

פרדיקט הינה טענה שערך האמת שלה הוא פונקציה של המשתנים שמופעים בטענה. למשל, ערך האמת של הטענה $P(x)$: "x מספר שלם" תלוי בערך ה-x.

כמת "לכל" \forall . פירוש הפסוק $\forall x: P(x)$ הוא: "לכל x מתקיים $P(x)$ ".
 כמת "קיים" \exists . פירוש הפסוק $\exists x: P(x)$ הוא: "קיים x שמקיים $P(x)$ ".

דוגמה. נסמן "x הוא סטודנט" $P(x)$ ו "x הוא בן אדם" $Q(x)$. אז משמעותו הפסוק $\forall x: P(x) \rightarrow Q(x)$ הוא "כל סטודנט הוא בן אדם". משמעות הפסוק $\exists x: \neg P(x) \wedge Q(x)$ הוא "קיים בן אדם שאינו סטודנט".

החלפת כמתים.

אם $P(x, y)$ פרדיקט דו-מקומי אז הפסוקים $\forall x \exists y: P(x, y)$ ו $\exists y \forall x: P(x, y)$ שונים זה מזה. למשל, נביט בפרדיקט $P(x, y)$: "מספר y יותר גדול ממספר x".
 אז משמעותו הפסוק $\forall x \exists y: P(x, y)$ הוא "לכל מספר x יש מספר y הגדול מ-x" וזאת אמת. לאומת זאת משמעותו הפסוק $\exists y \forall x: P(x, y)$ הוא "ישנו מספר y שהוא גדול מכל מספר x", וזה לא נכון.

שלילת כמתים.

$$\neg(\forall x P(x)) \equiv \exists x(\neg P(x));$$

$$\neg(\exists x P(x)) \equiv \forall x(\neg P(x));$$