סיכום ההרצאות בנושא לוגיקה

הקובץ הזה מכיל רק הסיכומים. החומר המלא ניתן למצוא בספרים הבאים (הספרים ישנם בספריה)

1. נתי ליניאל, מיכל פרנס, מתמטיקה בדידה, עמודים 50-76.
2. שי גירון , שוני דר, מתמטיקה בדידה, עמודים 9-18.

הגדרה. פסוק הוא קביעה כלשהי, שיש לה ערך אמת. במילים אחרות, פסוק הוא משפט שיש לו ערך אמת **T** או **F**.

למשל, המשפטים "לונדון היא בירת צרפת", "ישנם אנשים דוברי ספרדית" הם פסוקים (הראשון שקרי והשני אמת).

המשפטים "מה השעה?", "תסגור את הדלת" אינם פסוקים.

קשרים לוגיים בסיסיים

קשר השלילה **(negation,NOT)** $\neg$.
טבלת האמת של $\neg P$

P	$\neg P$
F	**T**
T	**F**

קשר "וגם" או "קוניונקציה" **(conjunction,AND)** $\wedge$.
טבלת האמת של $\wedge$:

P	Q	$P \wedge Q$
F	**F**	**F**
F	**T**	**F**
T	**F**	**F**
T	**T**	**T**

קשר "או" או "דיסיונקציה" **(disjunction,OR)** $\vee$.
טבלת האמת של $\vee$:

P	Q	$P \vee Q$
F	**F**	**F**
F	**T**	**T**
T	**F**	**T**
T	**T**	**T**

קשר הגרירה $\rightarrow$ **(implication)**. הפסוק $P \rightarrow Q$ נקרא "אם P אז Q", "P גורר Q", "Q נובע מ-P", "P תנאי מספיק ל-Q", "Q תנאי הכרחי ל-P".
.
טבלת האמת של הגרירה:

P	Q	$P \rightarrow Q$
F	**F**	**T**
F	**T**	**T**
T	**F**	**F**
T	**T**	**T**

קשר גרירה דו-צדדית $\leftrightarrow$ **(two sided implication)**.

הפסוק $P \leftrightarrow Q$ נקרא "P אם ורק אם Q", "P הוא תנאי הכרחי ומספיק עבור Q".

טבלת האמת של $\leftrightarrow$:

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
F	**F**	**T**
F	**T**	**F**
T	**F**	**F**
T	**T**	**T**

שקילות בין הפסוקים

פסוק מורכב (או **נוסחה לוגית**) הינו פסוק שבנוי מהפסוקים **האטומים** ע"י קשרים לוגיים. למשל, הפסוק $(P \to Q) \vee (\neg Q \wedge R)$ מורכב מהפסוקים האטומים P, Q, R.

שני פסוקים מורכבים נקראים **שקולים** כאשר יש להם אותם ערכי אמת, עבור כל האפשרויות של ערכי אמת של הפסוקים האטומים המופיעים בהם. במילים אחרות: שני פסוקים שקולים אם טבלאות האמת שלהם זהות.

דוגמא. נבדוק ש- $P \to Q \equiv \neg P \vee Q$.

P	Q	$P \to Q$	$\neg P \vee Q$
F	**F**	**T**	**T**
F	**T**	**T**	**T**
T	**F**	**F**	**F**
T	**T**	**T**	**T**

פסוק מורכב (=נוסחה לוגית) נקרא **טאוטולוגיה** כאשר הוא מקבל ערך אמת **T** עבור כל הצבה של המשתנים שלו.

פסוק מורכב (=נוסחה לוגית) נקרא **סתירה** כאשר הוא מקבל ערך אמת **F** עבור כל הצבה של המשתנים שלו.

דוגמאות. מטבלאות האמת הבאות ניתן לראות שהפסוק $P \vee \neg P$ הוא טאוטולוגיה והפסוק $P \wedge \neg P$ סתירה.

P	$P \vee \neg P$	$P \wedge \neg P$
F	**T**	**F**
T	**T**	**F**

חוקים של לוגיקה בוליאנית

1. חוק השלילה $\neg(\neg P) \equiv P$

2. חוק אידמפוטנטי $P \wedge P \equiv P, P \vee P \equiv P$.

3. חוק אסוציאטיבי
$$P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R, \quad P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R \ .$$

4. חוק קומוטטיבי
$$P \wedge Q \equiv Q \wedge P, \quad P \vee Q \equiv Q \vee P \ .$$

5. חוק דיסטריבוטיבי
$$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R), \quad P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \ .$$

6. חוק היחידה
$$P \wedge \mathrm{T} \equiv P, \quad P \vee \mathrm{F} \equiv P \ .$$

7. חוק השליטה
$$P \vee \mathrm{T} \equiv \mathrm{T}, \quad P \wedge \mathrm{F} \equiv \mathrm{F} \ .$$

8. חוק המשלים
$$P \wedge \neg P \equiv \mathrm{F}, \quad P \vee \neg P \equiv \mathrm{T} \ .$$

9. חוקי דה-מורגן
$$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q, \quad \neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q \ .$$

10. חוקי הבליעה
$$P \vee (P \wedge Q) \equiv P, \quad P \wedge (P \vee Q) \equiv P \ .$$

11.
$$P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q, \quad P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \leftarrow P) \ .$$

דוגמת הוכחת שקילות ע"י חוקיים הלוגיים

נוכיח ש- $(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R) \equiv Q \rightarrow (P \rightarrow R)$.

מחוק 11 אנו מקבלים :
$$(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R) \equiv \neg(\neg P \vee Q) \vee (\neg P \vee R) \ .$$
לפי חוק דה-מורגן (9) :
$$\neg(\neg P \vee Q) \vee (\neg P \vee R) \equiv (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \vee R) \ .$$
לפי החוק האסוציאטיבי (3) :
$$(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \vee R) \equiv \big((P \wedge \neg Q) \vee \neg P\big) \vee R \ .$$
לפי החוק הדיסטריבוטיבי (5) :
$$\big((P \wedge \neg Q) \vee \neg P\big) \vee R \equiv \big((P \vee \neg P) \wedge (\neg Q \vee \neg P)\big) \vee R \ .$$
לפי חוק המשלים (8) : $(P \vee \neg P) \equiv \mathbf{T}$. לכן
$$\big((P \vee \neg P) \wedge (\neg Q \vee \neg P)\big) \vee R \equiv \big(\mathbf{T} \wedge (\neg Q \vee \neg P)\big) \vee R \underset{(6)}{\equiv} (\neg Q \vee \neg P) \vee R \ .$$
לפי החוק האסוציאטיבי (3) :
$$(\neg Q \vee \neg P) \vee R \equiv \neg Q \vee (\neg P \vee R) \underset{(11)}{\equiv} Q \rightarrow (P \rightarrow R) \ .$$
מ.ש.ל.

צורת DNF ו CNF

נביט בשאלה איך לבנות נוסחה לוגית (פסוק מורכב) לפי טבלת האמת הנתונה. ניקח כדוגמה את הטבלה הבאה :

P	Q	R	$F(P,Q,R)=??$
T	T	T	T
T	T	F	F
T	F	T	F
T	F	F	T
F	T	T	F
F	T	F	T
F	F	T	F
F	F	F	F

<u>בניית פסוק $F(P,Q,R)$ בצורה דיסיונקטיבית נורמלית (disjunctive normal form, DNF)</u>

P	Q	R	$F(P,Q,R)=??$
T	T	T	T
T	T	F	F
T	F	T	F
T	F	F	T
F	T	T	F
F	T	F	T
F	F	T	F
F	F	F	F

$P \wedge Q \wedge R$

$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$

$\neg P \wedge Q \wedge \neg R$

הפסוק הסופי שווה ל $F(P,Q,R)=(P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge \neg Q\wedge \neg R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge \neg R)$.

<u>בניית פסוק $F(P,Q,R)$ בצורה קוניונקטיבית נורמלית (conjunctive normal form, CNF)</u>

P	Q	R	$F(P,Q,R)=??$
T	T	T	T
T	T	F	F
T	F	T	F

$\neg P \vee \neg Q \vee R$

$\neg P \vee Q \vee \neg R$

T	F	F	T
F	T	T	F
F	T	F	T
F	F	T	F
F	F	F	F

$\boxed{P \vee \neg Q \vee \neg R}$

$\boxed{P \vee Q \vee \neg R}$

$\boxed{P \vee Q \vee R}$

הפסוק הסופי שווה ל

$$F(P,Q,R) = (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee Q \vee R)$$

פרדיקטים וכמתים

פרדיקט הינה טענה שערך האמת שלה הוא פונקציה של המשתנים שמופעים בטענה. למשל, ערך האמת של הטענה $P(x)$: "x- מספר שלם" תלוי בערך ה-x.

כמת "לכל" $\forall$. פירוש הפסוק $\forall x : P(x)$ הוא :"לכל x מתקיים $P(x)$ ".

כמת "קיים" $\exists$. פירוש הפסוק $\exists x : P(x)$ הוא :"קיים x שמקיים $P(x)$ ".

דוגמה. נסמן " x הוא סטודנט"= $P(x)$ ו " x הוא בן אדם"= $Q(x)$. אז משמעותו הפסוק $\forall x : P(x) \to Q(x)$ הוא "כל סטודנט הוא בן אדם". משמעות הפסוק $\exists x : \neg P(x) \wedge Q(x)$ הוא קיים בן אדם שאינו סטודנט.

החלפת כמתים.

אם $P(x, y)$ פרדיקט דו-מקומי אז הפסוקים $\forall x \exists y : P(x, y)$ ו $\exists y \forall x : P(x, y)$ שונים זה מזה.

למשל, נביט בפרדיקט $P(x, y)$:"מספר y יותר גדול ממספר x ".

אז משמעותו הפסוק $\forall x \exists y : P(x, y)$ הוא "לכל מספר x יש מספר y הגדול מ- x " וזאת אמת.

לאומת זאת משמעותו הפסוק $\exists y \forall x : P(x, y)$ הוא "ישנו מספר y שהוא גדול מכל מספר x ",

וזה לא נכון.

שלילת כמתים.

$\neg(\forall x P(x)) \equiv \exists x(\neg P(x));$

$\neg(\exists x P(x)) \equiv \forall x(\neg P(x));$