סיכום ההרצאות בנושא קבוצות

הקובץ הזה מכיל רק הסיכומים. החומר המלא ניתן למצוא בספרים הבאים (הספרים ישנם בספריה).

1. נתי ליניאל, מיכל פרנס, מתמטיקה בדידה, עמודים 1-12.
2. שי גירון , שוני דר, מתמטיקה בדידה, עמודים 45-59.
3. א. גינזבורג, מתמטיקה דיסקרטית, כ.1 - תורת הקבוצות, עמודים 1-26, האוניברסיטה הפתוחה.

הגדרה. קבוצה היא אוסף דברים (איברים של הקבוצה) מוגדר היטב ללא חשיבות לסדר. מוגדר היטב, הכוונה, שלכל דבר אפשר לומר בוודאות האם הוא שייך לקבוצה או לא.

הגדרות של קבוצה:

1. רשימת האברים: $A=\{1,2,3,4\}$.
2. ע"י תכונה: אם $P(x)$ תכונה כלשהיא אז $A=\{x\,|\,P(x)\}$ מסמן קבוצה של כל ה-x-ים המקיימים את התכונה $P(x)$. למשל, $A=\{\ x\ |\ 1<x\le 6$ כל המספרים השלמים x שמקיימים $\}$.

הסימנים:

$a\in A$ פירושו הדבר, a שייך לקבוצה A (=a איבר של הקבוצה A).
$a\notin A$, פירושו הדבר, a לא שייך לקבוצה A (=a לא איבר של הקבוצה A).

למשל, $1\in\{1,2,3,4\}$ ו $5\notin\{1,2,3,4\}$.

קבוצות מואחדות.

א. קבוצה ריקה $\varnothing$ היא קבוצה ללא איברים, ז"א $\varnothing=\{\,\}$, או הפסוק $\forall x: x\notin\varnothing$ הוא אמת.
ב. מספרים טבעיים: $\mathbf{N}=\{1,2,3,4,....\}$.
ג. מספרים שלמים: $\mathbf{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,....\}$.

הכלה בין הקבוצות.

הגדרה. נאמר שקבוצה A מוכלת בקבוצה B (=B מכילה את A; A תת-קבוצה של B; A קבוצה חלקית ל-B) כאשר כל איבר של A שייך גם ל-B. סימון $A\subseteq B$.
פורמלית, $A\subseteq B$ אם ורק אם הפסוק $\forall x: x\in A\to x\in B$ הוא פסוק אמת.

הקבוצה A לא מוכלת בקבוצה B, כאשר קיים איבר a השייך ל-A שאינו שייך ל-B.
בכתיב פורמלי: $\exists a: a\in A\wedge a\notin B$. הסימון $A\not\subseteq B$.

דוגמאות:

א. $\{1,2,3\}\subseteq\{1,2,3,4\}$, אבל $\{1,2,3,5\}\not\subseteq\{1,2,3,4\}$.
ב. לכל קבוצה A מתקיים $A\subseteq A$ (כל קבוצה חלקית לעצמה).
ג. לכל קבוצה A מתקיים $\varnothing\subseteq A$ (קבוצה ריקה מוכלת בכל קבוצה).

שוויון בין שתי קבוצות.

קבוצות A,B שוות כאשר יש להן אותן איברים בדיוק, ז"א איבר x שייך לקבוצה A אם ורק אם הוא שייך ל-B. סימון $A=B$.
בכתיב פורמלי, הקבוצות A,B שוות אם ורק אם הפסוק $\forall x: x\in A\leftrightarrow x\in B$ הוא פסוק אמת.

תכונות של $=$.
א. $A=A$.
ב. אם $A=B$ אז $B=A$.
ג. אם $A=B$ ו $B=C$ אז $A=C$.

משפט. תהיינה A,B,C קבוצות כלשהן. אזי
א. אם $A\subseteq B$ ו $B\subseteq C$ אז $A\subseteq C$.
ב. $A=B$ אם ורק אם ($A\subseteq B$ וגם $B\subseteq A$).

פעולות עם קבוצות.

חיתוך בין שתי הקבוצות A ו B מוגדר כקבוצת האיברים השייכים לשתי הקבוצות בו-זמנית.
במילים אחרות $x\in A\cap B$ אם ורק אם $x\in A\wedge x\in B$.
בכתיב פורמלי $\forall x: x\in A\cap B \leftrightarrow x\in A\wedge x\in B$.

תכונות החיתוך.
1. $A\cap A=A$.
2. $A\cap\varnothing=\varnothing$.
3. $A\cap B\subseteq A$.
4. $A\cap B=B\cap A$.
5. $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

איחוד בין שתי הקבוצות A ו B מוגדר כקבוצת האיברים ששייכים לפחות לאחת מהקבוצות.
במילים אחרות $x\in A\cup B$ אם ורק אם $x\in A\vee x\in B$
בכתיב פורמלי $\forall x: x\in A\cup B \leftrightarrow x\in A\vee x\in B$.

תכונות האיחוד.
1. $A\cup A=A$.
2. $A\cup\varnothing=A$.
3. $A\subseteq A\cup B$.
4. $A\cup B=B\cup A$.
5. $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$.

הפרש (חיסור) בין הקבוצות.
אם A ו B קבוצות אז הפרשן $A-B$ מוגדר כאוסף של כל האיברים השייכים ל-A ולא שייכים ל-B. במילים אחרות $x\in A-B$ אם ורק אם $x\in A\wedge x\notin B$.
בכתיב פורמלי $\forall x: x\in A-B \leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B$.

הוכחת שוויונים בין הקבוצות

<u>הוכחה ע״י שימוש בתחשיב הפסוקים.</u>

נוכיח ש- $(A-B)-C=A-(B\cup C)$.

אנו צריכים להוכיח שהפסוקים $x\in A-(B\cup C)$ ו $x\in(A-B)-C$ שקולים לכל x. נסמן כ- $a(x)$ את הפסוק "$x\in A$". ערך האמת של $a(x)$ הוא T אם x שייך ל-A ו F כאשר x לא שייך ל-A. באופן דומה נסמן ע״י $b(x)$ ו $c(x)$ את הפסוקים "$x\in B$" ו "$x\in C$", בהתאם.

נפרק את כל אחד מהפסוקים $x \in A-(B \cup C)$ ו $x \in (A-B)-C$ לפסוקים שמורכבים מהפסוקים $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$:

$$x \in (A-B)-C \equiv x \in (A-B) \wedge x \notin C$$
$$\equiv (x \in A \wedge x \notin B) \wedge \neg(x \in C) \equiv x \in A \wedge \neg(x \in B) \wedge \neg(x \in C)$$
$$\equiv a(x) \wedge \neg b(x) \wedge \neg c(x)$$

$$x \in A-(B \cup C) \equiv x \in A \wedge x \notin (B \cup C) \equiv$$
$$\equiv x \in A \wedge \neg(x \in B \cup C) \equiv x \in A \wedge \neg(x \in B \vee x \in C)$$
$$\equiv a(x) \wedge \neg(b(x) \vee c(x))$$

עכשיו ניתן לבדוק שקילות בין הפסוקים $a(x) \wedge \neg b(x) \wedge \neg c(x)$ ו $a(x) \wedge \neg(b(x) \vee c(x))$ ע״י טבלת אמת או ע״י שימוש בחוקים לוגיים. למשל, לפי חוקי דה מורגן $\neg(b(x) \vee c(x)) \equiv \neg b(x) \wedge \neg c(x)$. לכן $a(x) \wedge \neg b(x) \wedge \neg c(x) \equiv a(x) \wedge \neg(b(x) \vee c(x))$.
מכאן נובע ש- $x \in (A-B)-C \equiv x \in A-(B \cup C)$ מתקיים לכל x . מ.ש.ל.

<u>הוכחה דרך הכלה דו-כיוונית.</u>

נוכיח ש- $A-(A \cap B) = A-B$.

נוכיח, קודם, את ההכלה $A-(A \cap B) \subseteq A-B$.

ניקח x כלשהו השייך לקבוצה $A-(A \cap B)$ ונוכיח שהוא שייך גם לקבוצה $A-B$. מהשייכות $x \in A-(A \cap B)$ נובע ש- x שייך ל A ולא שייך ל- $A \cap B$.
אם $x \notin B$, אז מהשייכות $x \in A$ מקבלים $x \in A-B$ והטענה הוכחה.
אם $x \in B$, אז מהשייכות $x \in A$ מקבלים $x \in A \cap B$. סתירה ל- $x \notin A \cap B$. לכן המקרה $x \in B$ בלתי אפשרי.

נוכיח עכשיו את ההכלה ההפוכה $A-(A \cap B) \supseteq A-B$.

ניקח x כלשהו השייך לקבוצה $A-B$ ונוכיח שהוא שייך גם לקבוצה $A-(A \cap B)$.
מהשייכות $x \in A-B$ נובע ש- x שייך ל A ולא שייך ל- B . מכוון ש- $x \notin B$ הוא גם לא שייך לכל קבוצה חלקית של B . לכן, $x \notin A \cap B$. יחד עם $x \in A$ אנו מקבלים $x \in A - A \cap B$.

אם כל הקבוצות הנידונות הן קבוצות חלקיות של קבוצה U, אז הקבוצה U נקראת קבוצה **אוניברסלית**. בהנחה כזאת הפסוק $x \in U$ הוא פסוק אמת לכל x .

הגדרה. לכל קבוצה A הקבוצה $\overline{A} = U - A$ נקראת **המשלים** של A .
פורמלית $\forall x : x \in \overline{A} \leftrightarrow x \notin A$.

תכונות המשלים :
1. $A - B = A \cap \overline{B}$.
2. $\overline{\overline{A}} = A$.
3. $\overline{U} = \varnothing, \overline{\varnothing} = U$.
4. $A \cap \overline{A} = \varnothing, A \cup \overline{A} = U$.

5. $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B},\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ (חוקי דה מורגן).

כללי יסוד של תורת הקבוצות הבוליאנית

1. חוק אידמפוטנטי $A\cap A=A, A\cup A=A$.
2. חוק החילוף (קומוטטיבי) $A\cap B=B\cap A, A\cup B=B\cup A$.
3. חוק הקיבוץ (אסוציאטיבי) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C), A\cup B=B\cup A$.
4. חוק הפילוג (דיסטריבוטיבי)
$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),$$
$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$
5. חוק הבליעה $A\cup(A\cap B)=A, A\cap(A\cup B)=A$.
6. חוק היחידה $A\cup\varnothing=A, A\cap U=A$.
7. חוק השליטה $A\cap\varnothing=\varnothing, A\cup U=U$.
8. חוק השלילה $\overline{\overline{A}}=A$.
9. חוק המשלים $A\cap\overline{A}=\varnothing, A\cup\overline{A}=U,$ $\overline{U}=\varnothing,\overline{\varnothing}=U$.
10. חוק דה מורגן $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B},\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

קבוצת החזקה.

תהי A קבוצה כלשהי. קבוצה דל רל התת-קבוצות של A נקראת **קבוצת החזקה** ומסומנת כ- $P(A)$. ז"א $X\in P(A)\Leftrightarrow X\subseteq A$.

דוגמאות

$$P(\varnothing)=\{\varnothing\}$$
$$P(\{1\})=\{\varnothing,\{1\}\}$$
$$P(\{1,2\})=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$$
$$P(\{1,2,3\})=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\},\{3\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$$

משפט. לכל קבוצה בת n איברים יש 2^n תת-קבוצות (בכתיב פורמלי $|A|=n\Rightarrow|P(A)|=2^n$).