סיכום ההרצאות בנושא קבוצות (המשך)

הקובץ הזה מכיל רק הסיכומים. החומר המלא ניתן למצוא בספרים הבאים (הספרים ישנם בספריה).

1. נתי ליניאל, מיכל פרנס, מתמטיקה בדידה, עמודים 1-29.
2. שי גירון , שוני דר, מתמטיקה בדידה, עמודים 45-59, 60-74.
3. א. גינזבורג, מתמטיקה דיסקרטית, כ.1 - תורת הקבוצות, עמודים 76-85, האוניברסיטה הפתוחה.

הגדרה. יהי n מספר טבעי כלשהו. סידרת n איברים $x_1, x_2, ..., x_n$ עם חשיבות לסדר נקראת <u>n-יה סדורה</u> ומסומנת כ- $(x_1, x_2, ..., x_n)$. 2-יה סדורה נקראת <u>זוג סדור</u>. 3-יה סדורה נקראת <u>שלשה סדורה</u>.
חשיבות לסדר: $(1,2,3) \neq (2,1,3)$.

שתי n-יות סדורות $(x_1, x_2, ..., x_n)$ ו $(y_1, y_2, ..., y_m)$ שוות אם ורק אם $m = n$ ו $x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge ... \wedge x_n = y_m$.

הגדרה. תהיינה $A_1, A_2, ..., A_n$ קבוצות כלשהן. אוסף של כל ה- n-יות $(x_1, x_2, ..., x_n)$ המקיימות $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, ..., x_n \in A_n$ נקרא <u>מכפלה קרטזית</u> של הקבוצות $A_1, A_2, ..., A_n$. היא מסומנת כ- $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$.
פורמלית, $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, ..., x_n \in A_n\}$

דוגמה. ניקח $A_1 = \{1,2\}, A_2 = \{a,b,c\}, A_3 = \{!,@,\#,\$\}$. אז

$$A_1 \times A_2 = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\};$$

$$\begin{aligned}
&A_1 \times A_2 \times A_3 = \\
&\{(1,a,!),(1,b,!),(1,c,!),(2,a,!),(2,b,!),(2,c,!),\\
&(1,a,@),(1,b,@),(1,c,@),(2,a,@),(2,b,@),(2,c,@),\\
&(1,a,\#),(1,b,\#),(1,c,\#),(2,a,\#),(2,b,\#),(2,c,\#),\\
&(1,a,\$),(1,b,\$),(1,c,\$),(2,a,\$),(2,b,\$),(2,c,\$)\}
\end{aligned}$$

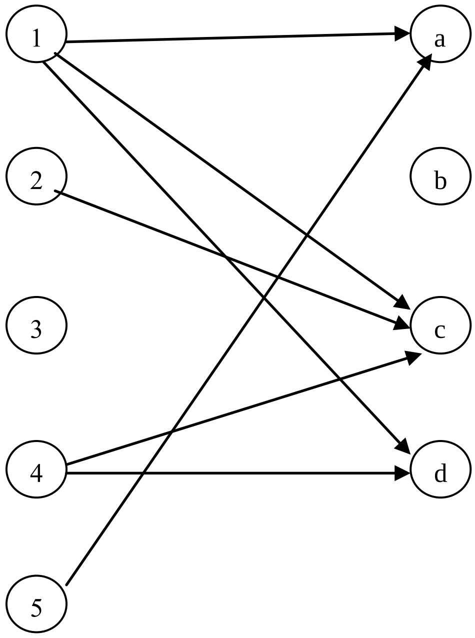
הערה: במקום $A \times A \times ... \times A$ כותבים A^n. למשל, אם $A = \{0,1\}$ אז
$A^3 = \{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$

טענה. אם $A_1, A_2, ..., A_n$ קבוצות סופיות אז
$|A_1 \times A_2 \times ... \times A_n| = |A_1| \times |A_2| \times ... \times |A_n|$.

הגדרה. תהיינה $A_1, A_2, ..., A_n$ קבוצות כלשהן. כל קבוצה חלקית S למכפלה קרטזית $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ נקראת <u>יחס n-מקומי</u> בין הקבוצות $A_1, A_2, ..., A_n$. כאשר $n = 2$ יחס $S \subseteq A_1 \times A_2$ נקרא <u>יחס בינארי</u> מ- A_1 ל- A_2. הקבוצה A_1 נקראת <u>תחום היחס</u> והקבוצה A_2 נקראת <u>טווח היחס</u>.

הגדרה. יהי $S \subseteq A \times B$ יחס בינארי.
הקבוצה של כל האיברים של A שמופיעים כאיברים ראשונים בזוגות של S נקראת <u>תחום ההגדרה</u> של היחס ומסומנת כ- $D(S)$. הגדרה פורמלית:
$a \in D(S) \Leftrightarrow \exists b \in B : (a,b) \in S$.
הקבוצה של כל האיברים של B שמופיעים כאיברים שניים בזוגות של S נקראת <u>התמונה</u> של היחס ומסומנת כ- $R(S)$. הגדרה פורמלית:
$b \in R(S) \Leftrightarrow \exists a \in A : (a,b) \in S$.

דוגמה. ניקח יחס בינארי
$S = \{(1,a),(1,c),(1,d),(2,c),(4,c),(4,d),(5,a)\}$ מקבוצה $A_1 = \{1,2,3,4,5\}$ לקבוצה $A_2 = \{a,b,c,d\}$. תחום ההגדרה של היחס הינו $D(S) = \{1,2,4,5\}$. התמונה של היחס היא $R(S) = \{a,c,d\}$
ייצוג היחס ע"י גרף דו-צדדי מכוון:



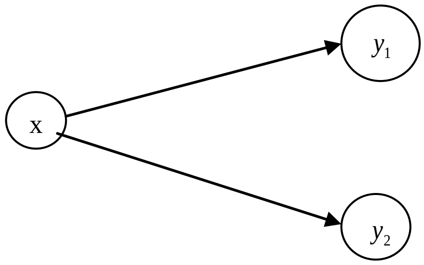
ייצוג היחס ע"י מטריצה (טבלה).

	a	b	c	d
1	1	0	1	1
2	0	0	1	0
3	0	0	0	0
4	0	0	1	1
5	1	0	0	0

<u>יחס זהותי (יחס הזהות).</u>
תהי A קבוצה כלשהי. יחס הזהות מעל A מוגדר כדלקמן $i_A = \{(a,a) \mid a \in A\}$. למשל, אם $A = \{1,2,3,4\}$ אז $i_A = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$.

הגדרה. תהיינה A,B שתי קבוצות כלשהן. יחס בינארי $f\subseteq X\times Y$ נקראה <u>פונקציה</u> מ- X ל- Y, כאשר לכל $x\in X$ קיים לכל היותר $y\in Y$ אחד שמקיים $(x,y)\in f$. הקבוצה X נקראת תחום של הפונקציה והקבוצה Y נקראת טווח של הפונקציה. העובדה ש- f הינה פונקציה מ- X ל- Y מסמנים ע"י: $f:X\to Y$.

יחס $f\subseteq X\times Y$ אינו פונקציה אם ורק אם קיים $x\in X$ שעבורו קיימים $y_1,y_2\in Y$ כך ש- $y_1\neq y_2\wedge(x,y_1)\in f\wedge(x,y_2)\in f$:



<u>תחום ההגדרה</u> $D(f)$ של פונקציה $f:X\to Y$ הוא קבוצה חלקית לתחום X המכילה את כל האיברים $x\in X$ שעבורם קיים $y\in Y$ כך ש- $(x,y)\in f$. אם $x\in X$ לא שייך לתחום ההגדרה של f אז אומרים שהפונקציה <u>לא מוגדרת</u> ב- x. אם $x\in X$ שייך לתחום ההגדרה, אז קיים $y\in Y$ יחיד שמקיים $(x,y)\in f$. אותו נסמן כ- $f(x)$. ז"א $y=f(x)\Leftrightarrow(x,y)\in f$.

<u>תמונה</u> $R(f)$ של פונקציה $f:X\to Y$ היא קבוצה חלקית לטווח Y המכילה את כל האיברים $y\in Y$ שעבורם קיים $x\in X$ כך ש- $(x,y)\in f$.

דוגמה 1. ניקח $X=\{1,2,3,4,5\},Y=\{a,b,c,d\},\ f=\{(1,c),(2,a),(4,c),(5,d)\}$. היחס f הינו פונקציה: $f(1)=c,\ f(2)=a,\ f(4)=c,\ f(5)=d$ ו $f(3)$ לא מוגדר. בדוגמה הזאת $D(f)=\{1,2,4,5,\},R(f)=\{a,c,d\}$.

דוגמה 2. ניקח $X=\{1,2,3,4,5\},Y=\{a,b,c,d\},\ g=\{(1,c),(1,a),(2,a),(4,c),(5,d)\}$. היחס g אינו פונקציה, כי עבור $x=1$ ישנם שני ערכים של $y\in Y$ ($y_1=a,y_2=c$) שנמצאים עם 1 ביחס g.

דוגמה 3. ניקח $X=\mathbf{R},Y=\mathbf{R},\ f=\{(x,y)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}\mid xy=1\}$. היחס f הינו פונקציה, כי עבור כל $x\neq 0$ ישנו y יחיד שנמצא עמו ביחס: $y=\dfrac{1}{x}$. כאשר $x=0$ למשוואה $xy=1$ אין פתרון עבור ה- y ולכן הפונקציה לא מוגדרת ב-0.

דוגמה 4. ניקח $X=\mathbf{R},Y=\mathbf{R},g=\{(x,y)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}\mid xy^2=1\}$. היחס g איננה פונקציה, כי עבור $x=1$ ישנם שני ערכים של y שנמצאים עמו ביחס: $y=1$ ו $y=-1$.

דוגמה 5. לכל קבוצה X היחס i_X הוא פונקציה שנקראת פונקציה זהותית. התחום והטווח שלה שוות לקבוצה X ו $i_X(x)=x$ מתקיים לכל $x\in X$.

טענה. שתי פונקציות $f:X\to Y$ ו $g:X\to Y$ שוות אם ורק אם
א. $D(f)=D(g)$.
ב לכל $x\in D(f)$ מתקיים $f(x)=g(x)$.

הגדרה. פונקציה $f: X \to Y$ נקראת פונקציה <u>שלמה</u> אם הוא מוגדרת בכל $x \in X$. במילים אחרות $R(f)=X$.

דוגמאות.

א. פונקציה $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ המוגדרת ע״י הנוסחה $f(x)=\frac{1}{x}$ לא שלמה, כי היא לא מוגדרת בנקודה $x=0$.

ב. פונקציה $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ המוגדרת ע״י הנוסחה $f(x)=x^2$ שלמה, כי היא מוגדרת לכל x ממשי.

ג. כל פונקציה זהותית היא פונקציה שלמה.

הגדרה. פונקציה $f: X \to Y$ נקראת פונקציית <u>״על״</u> אם לכל $y \in Y$ קיים $x \in X$ (המקור) כך ש- $f(x)=y$. במילים אחרות, $D(f)=Y$.

דוגמאות.

א. פונקציה $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ המוגדרת ע״י הנוסחה $f(x)=\frac{1}{x}$ לא ״על״, כי ל $y=0$ אין מקור, ז״א לא קיים $x\in\mathbf{R}$ שמקיים $\frac{1}{x}=0$.

ב. נביט בפונקציה $f:\mathbf{R}-\{1\}\to\mathbf{R}-\{1\}$ המוגדרת ע״י הנוסחה $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$. נוכיח שהיא פונקציית ״על״. יש להראות שלכל $y\in\mathbf{R}-\{1\}$ למשוואה $y=\frac{x+1}{x-1}$ יש פתרון עבור x:

$$y=\frac{x+1}{x-1}\Rightarrow (x-1)y=x+1\Rightarrow xy-y=x+1\Rightarrow xy-x=y+1\Rightarrow x(y-1)=y+1.$$

לפי הנתון $y\in\mathbf{R}-\{1\}$. לכן $y\neq 1$ וניתן לחלק ב- $(y-1)$: $x=\frac{y+1}{y-1}$.

ג. כל פונקציה זהותית היא פונקציית על.

הגדרה. פונקציה $f: X \to Y$ נקראת פונקציה <u>חד-חד-ערכית (חח״ע)</u> אם היא מקיימת אחד מהתנאים הבאים (כל התנאים שקולים זה לזה).

א. לכל $y\in Y$ קיים לכל היותר $x\in X$ אחד שמקיים $f(x)=y$.

ב. לכל שני איברים $x_1,x_2\in D(X)$ מתקיים: $x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$.

ג. לכל שני איברים $x_1,x_2\in D(X)$ מתקיים: $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$.

דוגמאות.

א. נוכיח שהפונקציה $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ המוגדרת ע״י הנוסחה $f(x)=\frac{1}{x}$ היא חח״ע. נעזר בחלק ג׳ של ההגדרה:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\frac{1}{x_1}=\frac{1}{x_2}\Rightarrow x_2=x_1$$ מ.ש.ל.

ב. פונקציה $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ המוגדרת ע״י הנוסחה $f(x)=x^2$ אינה חח״ע, כי אם ניקח $x_1=1, x_2=-1$ אז $x_1\neq x_2$ ו $f(x_1)=1=f(x_2)$. סתירה לחלק ג׳ של ההגדרה.

ג. כל פונקציה זהותית היא פונקציה חח״ע.