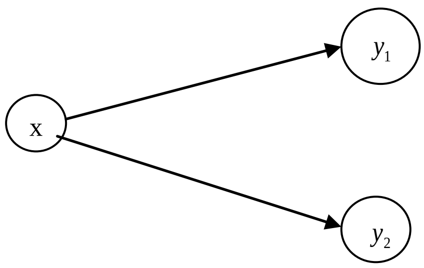
סיכום ההרצאות בנושא פונקציות

הקובץ הזה מכיל רק הסיכומים. החומר המלא ניתן למצוא בספרים הבאים (הספרים ישנם בספריה).

1. נתי ליניאל, מיכל פרנס, מתמטיקה בדידה, עמודים 23-29 .
2. שי גירון , שוני דר, מתמטיקה בדידה, עמודים 60-67.
3. א. גינזבורג, מתמטיקה דיסקרטית, כ.1 - תורת הקבוצות, עמודים 76-86, האוניברסיטה הפתוחה.

הגדרה. תהיינה A,B שתי קבוצות כלשהן. יחס בינארי $f \subseteq X\times Y$ נקראה <u>פונקציה</u> מ- X ל- Y, כאשר לכל $x\in X$ קיים לכל היותר $y\in Y$ אחד שמקיים $(x,y)\in f$. הקבוצה X נקראת תחום של הפונקציה והקבוצה Y נקראת טווח של הפונקציה. העובדה ש- f הינה פונקציה מ- X ל- Y מסמנים ע"י: $f: X\to Y$.

יחס $f\subseteq X\times Y$ אינו פונקציה אם ורק אם קיים $x\in X$ שעבורו קיימים $y_1,y_2\in Y$ כך ש- $f \ni (x,y_2) \wedge f \ni (x,y_1) \wedge y_1\neq y_2$:



<u>תחום ההגדרה</u> $D(f)$ של פונקציה $f: X\to Y$ הוא קבוצה חלקית לתחום X המכילה את כל האיברים $x\in X$ שעבורם קיים $y\in Y$ כך ש- $(x,y)\in f$. אם $x\in X$ לא שייך לתחום ההגדרה של f אז אומרים שהפונקציה <u>לא מוגדרת</u> ב- x. אם $x\in X$ שייך לתחום ההגדרה, אז קיים $y\in Y$ יחיד שמקיים $(x,y)\in f$. אותו נסמן כ- $f(x)$. ז"א $y=f(x) \Leftrightarrow (x,y)\in f$.

<u>תמונה</u> $R(f)$ של פונקציה $f: X\to Y$ היא קבוצה חלקית לטווח Y המכילה את כל האיברים $y\in Y$ שעבורם קיים $x\in X$ כך ש- $(x,y)\in f$.

דוגמה 1. ניקח $X=\{1,2,3,4,5\}, Y=\{a,b,c,d\}, f=\{(1,c),(2,a),(4,c),(5,d)\}$. היחס f הינו פונקציה: $f(1)=c,\ f(2)=a,\ f(4)=c,\ f(5)=d$ ו $f(3)$ לא מוגדר. בדוגמה הזאת $D(f)=\{1,2,4,5,\}, R(f)=\{a,c,d\}$.

דוגמה 2. ניקח $X=\{1,2,3,4,5\}, Y=\{a,b,c,d\}, g=\{(1,c),(1,a),(2,a),(4,c),(5,d)\}$. היחס g אינו פונקציה, כי עבור $x=1$ ישנם שני ערכים של $y\in Y$ ($y_1=a, y_2=c$) שנמצאים עם 1 ביחס g.

דוגמה 3. ניקח $X=\mathbf{R}, Y=\mathbf{R},\ f=\{(x,y)\in \mathbf{R}\times\mathbf{R} \mid xy=1\}$. היחס f הינו פונקציה, כי עבור כל $x\neq 0$ ישנו y יחיד שנמצא עמו ביחס: $y=\dfrac{1}{x}$. כאשר $x=0$ למשוואה $xy=1$ אין פתרון עבור ה- y ולכן הפונקציה לא מוגדרת ב-0.

דוגמה 4. ניקח $X=\mathbf{R}, Y=\mathbf{R}, g=\{(x,y)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R} \mid xy^2=1\}$. היחס g איננה פונקציה, כי עבור $x=1$ ישנם שני ערכים של y שנמצאים עמו ביחס: $y=1$ ו $y=-1$.

דוגמה 5. לכל קבוצה X היחס i_X הוא פונקציה שנקראת פונקציה זהותית. התחום והטווח שלה שוות לקבוצה X ו $i_X(x)=x$ מתקיים לכל $x\in X$.

טענה. שתי פונקציות $f:X\to Y$ ו $g:X\to Y$ שוות אם ורק אם

א. $D(f)=D(g)$.

ב לכל $x\in D(f)$ מתקיים $f(x)=g(x)$.

הגדרה. פונקציה $f:X\to Y$ נקראת פונקציה <u>שלמה</u> אם הוא מוגדרת בכל $x\in X$. במילים אחרות $R(f)=X$.

דוגמאות.

א. פונקציה $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ המוגדרת ע"י הנוסחה $f(x)=\dfrac{1}{x}$ לא שלמה, כי היא לא מוגדרת בנקודה $x=0$.

ב. פונקציה $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ המוגדרת ע"י הנוסחה $f(x)=x^2$ שלמה, כי היא מוגדרת לכל x ממשי.

ג. כל פונקציה זהותית היא פונקציה שלמה.

הגדרה. פונקציה $f:X\to Y$ נקראת פונקציית <u>"על"</u> אם לכל $y\in Y$ קיים $x\in X$ (המקור) כך ש- $f(x)=y$. במילים אחרות, $D(f)=Y$.

דוגמאות.

א. פונקציה $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ המוגדרת ע"י הנוסחה $f(x)=\dfrac{1}{x}$ לא "על", כי ל $y=0$ אין מקור, ז"א לא קיים $x\in\mathbf{R}$ שמקיים $\dfrac{1}{x}=0$.

ב. נביט בפונקציה $f:\mathbf{R}-\{1\}\to\mathbf{R}-\{1\}$ המוגדרת ע"י הנוסחה $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$. נוכיח שהיא פונקציית "על". יש להראות שלכל $y\in\mathbf{R}-\{1\}$ למשוואה $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ יש פתרון עבור x:

$$y=\frac{x+1}{x-1}\Rightarrow (x-1)y=x+1\Rightarrow xy-y=x+1\Rightarrow xy-x=y+1\Rightarrow x(y-1)=y+1.$$

לפי הנתון $y\in\mathbf{R}-\{1\}$. לכן $y\neq 1$ וניתן לחלק ב- $(y-1)$: $x=\dfrac{y+1}{y-1}$.

ג. כל פונקציה זהותית היא פונקציית על.

הגדרה. פונקציה $f:X\to Y$ נקראת פונקציה <u>חד-חד-ערכית (חח"ע)</u> אם היא מקיימת אחד מהתנאים הבאים (כל התנאים שקולים זה לזה).

א. לכל $y\in Y$ קיים לכל היותר $x\in X$ אחד שמקיים $f(x)=y$.

ב. לכל שני איברים $x_1,x_2\in D(X)$ מתקיים: $x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$.

ג. לכל שני איברים $x_1,x_2\in D(X)$ מתקיים: $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$.

דוגמאות.

א. נוכיח שהפונקציה $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ המוגדרת ע"י הנוסחה $f(x)=\frac{1}{x}$ היא חח"ע . נעזר בחלק ג' של ההגדרה :

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\frac{1}{x_1}=\frac{1}{x_2}\Rightarrow x_2=x_1$ מ.ש.ל.

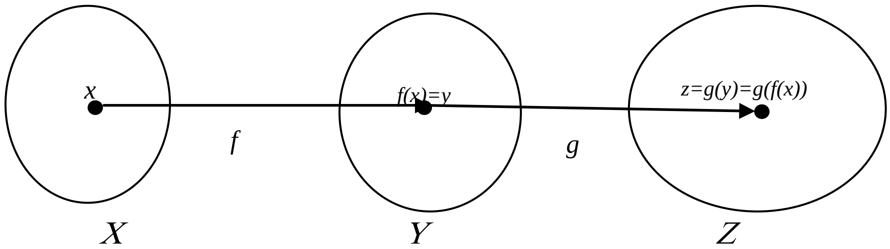
ב. פונקציה $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ המוגדרת ע"י הנוסחה $f(x)=x^2$ אינה חח"ע, כי אם ניקח $x_1=1, x_2=-1$ אז $x_1\neq x_2$ ו $f(x_1)=1=f(x_2)$. סתירה לחלק ג' של ההגדרה.

ג. כל פונקציה זהותית היא פונקציה חח"ע.

הרכבת פונקציות ופונקציה הפוכה

הגדרה. תהיינה $f:X\to Y, g:Y\to Z$ פונקציות כלשהן. פונקציה מ- X ל- Z המתאימה לאיבר $x\in X$ את האיבר $g(f(x))$ נקראת <u>הרכבה</u> של f ו g ומסומנת כ- $f\circ g$, ז"א $f\circ g:X\to Z$ ו $(f\circ g)(x)=g(f(x))$.

הרכבת פונקציות ניתן לתאר ע"י דיאגרמה הבאה



נציין שתחום ההגדרה של הפונקציה $f\circ g$ מכיל את כל האבירים $x\in X$ שמקיימים $x\in D(f)$ וגם $f(x)\in D(g)$.

דוגמאות.

דוגמה 1. ניקח $X=\{1,2,3,4,5\}, Y=\{a,b,c,d\}, Z=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$ ו $f=\begin{pmatrix}1&2&3&5\\ b&c&b&a\end{pmatrix}, g=\begin{pmatrix}b&c&d\\ \alpha&\beta&\delta\end{pmatrix}$. אז $f\circ g=\begin{pmatrix}1&2&3\\ \alpha&\beta&\alpha\end{pmatrix}$.

דוגמה 2. ניקח $X=Y=Z=\mathbf{R}$ ו $f(x)=x+\frac{1}{x}, g(x)=x^2+1$ אז

$$(f\circ g)(x)=g(f(x))=\left(x+\tfrac{1}{x}\right)^2+1=x^2+\frac{1}{x^2}+3;$$

$$(g\circ f)(x)=f(g(x))=(x^2+1)+\frac{1}{x^2+1}$$

נציין שבדרך כלל $f\circ g\neq g\circ f$.

הגדרה. תהי $f:X\to Y$ פונקציה כלשהי. פונקציה $g:Y\to X$ נקראת <u>הפוכה ל-</u> f אם ורק אם $f\circ g=i_X$ וגם $g\circ f=i_Y$. הפונקציה שיש הפוכה נקראת פונקציה <u>הפיכה</u>.

מהגדרת פונקציה הפוכה נובעת את הטענה הבאה

טענה. תהיינה $f:X\to Y$ ו $g:Y\to X$ פונקציות כלשהן. הפונקציה g תהיה הפוכה ל- f אם ורק אם התנאים הבאים מתקיימים:
א. $g(f(x))=x$ מתקיים לכל $x\in X$.
ב. $f(g(y))=y$ מתקיים לכל $y\in Y$.

דוגמאות.

דוגמה 1. ניקח $X=\{1,2,3,4\},Y=\{a,b,c,d\}$ ו $f=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\a&b&c&d\end{pmatrix},g=\begin{pmatrix}a&b&c&d\\1&2&3&3\end{pmatrix}$.אז $f\circ g=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}=i_X;g\circ f=\begin{pmatrix}a&b&c&d\\a&b&c&d\end{pmatrix}=i_Y$. לכן g הפוכה ל- f ו f הפוכה ל- g. כל אחת מהפונקציות f,g היא הפיכה.

דוגמה 2. ניקח $X=Y=\mathbf{R}$ ו $f(x)=2x+5,g(x)=\dfrac{x-5}{2}$. אז לכל $x\in\mathbf{R}$ וכל $y\in\mathbf{R}$ מתקיים:

$$g(f(x))=\frac{(2x+5)-5}{2}=x;\ f(g(y))=2\frac{y-5}{2}+5=y\ .$$

לכן פונקציה f הפוכה ל- g ופונקציה g הפוכה ל- f. שתיהן הפיכות.

טענה. לכל פונקציה $f:X\to Y$ יש לכל היותר הפוכה אחת.

מהטענה הזאת נובע שאם פונקציה $f:X\to Y$ הפיכה אז יש לה הפוכה אחת ויחידה. נסמן את ההפוכה ל- f כ- f^{-1}. נזכיר ש- f^{-1} פועלת מ- Y ל- X. הקשר בין הפונקציה המקורית לבין ההפוכה שלה נתון ע"י הנוסחה $f(x)=y\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$.

המשפט הבא נותן קריטריון להפיכות הפונקציה.

משפט. פונקציה $f:X\to Y$ הפיכה אם ורק אם היא שלמה, חח"ע ועל.

אם פונקציה $f:X\to Y$ מקיימת את כל שלושת התנאים, אז קיימת לה פונקציה הפוכה $f^{-1}:Y\to X$. כדי למצוא אותה יש לבטא את ה- x מהמשוואה $y=f(x)$.

דוגמה 1. נתונה פונקציה $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ המוגדרת ע"י הנוסחה $f(x)=\begin{cases}x,x\ge 0\\2x,x<0\end{cases}$. נבדוק האם היא הפיכה.
א. שלמות. פונקציה שלמה, כי היא מוגדרת בכל התחום שלה: $\mathbf{R}$.

ב. חח"ע. נביט בשוויון $f(x_1)=f(x_2)$.

אם $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ אז $f(x_1)=x_1, f(x_2)=x_2$. לכן $f(x_1)=f(x_2) \Leftarrow x_1=x_2$.

אם $x_1 \ge 0, x_2 < 0$ אז $f(x_1)=x_1, f(x_2)=2x_2$. לכן $f(x_1)=f(x_2) \Leftarrow x_1=2x_2$

השוויון האחרון לא ייתכן, כי $x_1 \ge 0, x_2 < 0$. באופן דומה ניתן להראות שהמקרה $x_1 < 0, x_2 \ge 0$ גם בלתי אפשרי.

אם $x_1 < 0, x_2 < 0$ אז $f(x_1)=2x_1, f(x_2)=2x_2$. לכן $f(x_1)=f(x_2) \Leftarrow x_1=x_2$.

הוכחנו שבכל המקרים מתקיימת הגרירה $f(x_1)=f(x_2) \Leftarrow x_1=x_2$.

ג. על. יש לבדוק שלכל $y \in \mathbf{R}$ למשוואה $y=f(x)$ יש פתרון עבור x .

אם $y \ge 0$ אז $y=f(x) \Leftarrow y=x \Leftarrow x=y$

אם $y < 0$ אז $y=f(x) \Leftarrow y=2x \Leftarrow x=\frac{y}{2}$.

הוכחנו שפונקציה הנ"ל הפיכה. ההפוכה שלה אפשר למצוא מחלק ג':

$$x=f^{-1}(y)=\begin{cases} y, y \ge 0 \\ \frac{y}{2}, y < 0 \end{cases}$$.