סיכום ההרצאות בנושא יחסים בינאריים מעל הקבוצה

הקובץ הזה מכיל רק הסיכומים. החומר המלא ניתן למצוא בספרים הבאים (הספרים ישנם בספריה).

1. נתי ליניאל, מיכל פרנס, מתמטיקה בדידה, עמודים 13-23.
2. שי גירון , שוני דר, מתמטיקה בדידה, עמודים 75-82.
3. א. גינזבורג, מתמטיקה דיסקרטית, כ.1 - תורת הקבוצות, עמודים 29-54, 58-69 , האוניברסיטה הפתוחה.

הגדרה. תהי A קבוצה כלשהי. יחס בינארי $R \subseteq A \times A$ נקראה יחס בינארי <u>מעל</u> A .

הגדרה. יחס R מעל A נקרא <u>רפלקסיבי</u> אם לכל $a \in A$ הזוג (a,a) שייך ל- R . בכתיב פורמלי, $\forall a \in A: (a,a) \in R$. ניסוח שקול: $i_A \subseteq R$.

דוגמאות.

דוגמה 1. היחס $R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(3,3)\}$ המוגדר מעל הקבוצה $A = \{1,2,3\}$ הינו יחס רפלקסיבי והיחס $S = \{(1,1),(1,2),(1,3),(3,3)\}$ מעל אותה קבוצה אינו רפלקסיבי, כי $(2,2) \notin S$.

דוגמה 2. היחס $S = \{(x,y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x^2 = y^2\}$ המוגדר מעל $\mathbf{R}$ הינו רפלקסיבי. לאומת זאת היחס $T = \{(x,y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x^{-1} = y^{-1}\}$ שמוגדר מעל אותה הקבוצה אינו רפלקסיבי, כי $(0,0) \notin T$.

דוגמה 3. לכל קבוצה A יחס הזהות i_A הינו יחס רפלקסיבי.

הגדרה. יהי $R \subseteq A \times A$ יחס בינארי מעל קבוצה A . היחס $R^{-1} = \{(b,a) \in A \times A \mid (a,b) \in R\}$ נקרא <u>יחס הפוך</u> ל- R (הזוג (a,b) נקרא <u>הפוך</u> לזוג (b,a)).

בכתיב פורמלי $\forall a,b \in A: (a,b) \in R^{-1} \Leftrightarrow (b,a) \in R$.

דוגמה. ניקח $A = \{1,2,3,4,5\}$ ו $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,3),(3,4),(4,1),(1,4),(5,5)\}$. אז $R^{-1} = \{(1,1),(2,1),(1,2),(3,2),(4,3),(1,4),(4,1),(5,5)\}$.

הגדרה. יחס בינארי $R \subseteq A \times A$ מעל קבוצה A נקרא <u>סימטרי</u> אם $R = R^{-1}$. במילים אחרות, יחס R הינו סימטרי כאשר הוא מקיים את התנאי הבא: $\forall a,b \in A: (a,b) \in R \Leftrightarrow (b,a) \in R$.

דוגמאות.

דוגמה 1. היחס $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(4,1),(1,4),(5,5)\}$ שמוגדר מעל הקבוצה $A = \{1,2,3,4,5\}$ הינו יחס סימטרי.

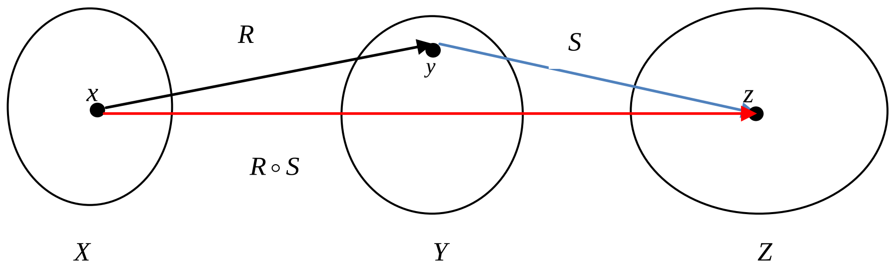
דוגמה 2. היחס $R = \{(1,1),(3,4),(4,1),(1,4),(5,5)\}$ שמוגדר מעל הקבוצה $A = \{1,2,3,4,5\}$ אינו סימטרי, כי $(3,4) \in R$ ו $(4,3) \notin R$.

דוגמה 3. תהי L קבוצה של הקווים הישרים של המישור. היחס $R = \{(a,b) \mid b - \text{מקביל ל} \ a\}$ הוא יחס סימטרי, מכוון שאם ישר a מקביל לישר b, אז גם b מקביל ל- a.

דוגמה 4. תהי $\mathbf{N}$ קבוצת המספרים הטבעיים. היחס $R = \{(a,b) \mid a < b\}$ אינו סימטרי, כי $(1,2) \in R$ ו $(2,1) \notin R$.

הרכבת יחסים ויחסים טרנזיטיביים

הגדרה. תהיינה X,Y,Z שלוש קבוצות כלשהן ו $R\subseteq X\times Y, S\subseteq Y\times Z$ שני יחסים בינאריים בין הקבוצות. נגדיר יחס $R\circ S\subseteq X\times Z$ באופן הבא: הזוג (x,z) שייך ליחס $R\circ S$ אם ורק אם קיים איבר $y\in Y$ כך ש- $(x,y)\in R\wedge(y,z)\in S$ (ראה את ציור). היחס $R\circ S$ נקרא <u>הרכבה</u> של היחסים R ו S.



דוגמה 1.

ניקח $X=\{1,2,3,4,5\}, Y=\{a,b,c,d\}, Z=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$ ו

$$R=\{(1,a),(2,a),(3,b),(4,a),(4,b),(4,d)\}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&4&4\\a&a&b&a&b&d\end{pmatrix}\subseteq X\times Y;$$

$$S=\{(b,\alpha),(c,\gamma),(c,\delta),(d,\gamma)\}=\begin{pmatrix}b&c&c&d\\\alpha&\gamma&\delta&\gamma\end{pmatrix}\subseteq Y\times Z$$

אז $R\circ S=\begin{pmatrix}3&4&4\\\alpha&\alpha&\gamma\end{pmatrix}$.

דוגמה 2.

ניקח $X=Y=Z=\{1,2,3,4,5\}$ ו

$$R=\{(1,1),(2,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,4)\}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&4&4\\1&1&2&1&2&4\end{pmatrix}\subseteq X\times X.$$

אז $R\circ R=\begin{pmatrix}1&2&3&4&4&4&4\\1&1&1&1&1&2&4\end{pmatrix}\subseteq X\times X$.

הגדרה. יחס בינארי $R\subseteq X\times X$ מעל קבוצה X נקרא יחס <u>טרנזיטיבי</u> כאשר הוא מקיים את התנאי הבא: $\forall x,y,z\in X:(x,y)\in R\wedge(y,z)\in R\Rightarrow(x,z)\in R$.

אפשר להוכיח שיחס $R\subseteq X\times X$ יהיה טרנזיטיבי אם ורק אם הוא מקיים את התנאי $R\circ R\subseteq R$.

הערה: יחס $R\subseteq X\times X$ <u>אינו</u> טרנזיטיבי רק כאשר קיימים שלושה איברים $x,y,z\in X$ שהזוגות (x,y) ו (y,z) שייכים ליחס R אבל ההרכבה שלהם (x,z) לא שייכת ל- R.
בכתיב פורמאלי: $(x,y)\in R\wedge(y,z)\in R\wedge(x,z)\notin R$.

דוגמאות

דוגמה 1. $X=\{1,2,3,4,5\}$,

$$R=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(3,4),(2,4)\}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&3&2\\1&2&3&4&4&4\end{pmatrix}\subseteq X\times X$$

נרכיב R עם עצמו:

$$R\circ R=\begin{pmatrix}1&1&1&1&3&2\\1&2&3&4&4&4\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&1&1&1&3&2\\1&2&3&4&4&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\end{pmatrix}.$$

היחס טרנזיטיבי, כי $R\circ R\subseteq R$.

דוגמה 2. $X=\{1,2,3,4,5\}$, $R=\{(1,2),(1,3),(1,4)\}=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&4\end{pmatrix}\subseteq X\times X$

נרכיב R עם עצמו: $R\circ R=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&4\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&4\end{pmatrix}=\varnothing$. היחס טרנזיטיבי, כי $R\circ R\subseteq R$.

דוגמה 3. $X=\{1,2,3,4,5\}$, $R=\{(1,2),(1,3),(2,3),(3,4)\}=\begin{pmatrix}1&1&2&3\\2&3&3&4\end{pmatrix}\subseteq X\times X$

נרכיב R עם עצמו: $R\circ R=\begin{pmatrix}1&1&2&3\\2&3&3&4\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&1&2&3\\2&3&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&2\\3&4&4\end{pmatrix}$. היחס אינו טרנזיטיבי, כי $R\circ R\not\subseteq R$.

דוגמה 4. לכל קבוצה X יחס הזהותי i_X טרנזיטיבי, כי $i_X\circ i_X=i_X$.

דוגמה 5. תהא $X\subseteq\mathbf{N}$ קבוצת כלשהי של מספרים טבעיים. נגדיר יחס "x מחלק את y" (סימון $x\,|\,y$ כאשר x מחלק את y ללא שארית (="y מתחלק ב-x ללא שארית). במילים אחרות, $x\,|\,y$ כאשר השבר $\frac{y}{x}$ הוא מספר שלם.

למשל, $4\,|\,2$, אבל $2\nmid 4$.

טענה. היחס x מחלק את y הוא יחס טרנזיטיבי.

הוכחה. נניח ש-$x\,|\,y$ ו $y\,|\,z$. אז המספרים y/x ו z/y הינם שלמים. לכן מכפלתם $(z/y)\cdot(y/x)=z/x$ גם מספר שלם.

יחס שקילות

הגדרה. יחס בינארי R מעל קבוצה X נקרא יחס שקילות כאשר הוא

א. רפלקסיבי ($i_X\subseteq R$);

ב. סימטרי ($R^{-1}=R$);

ג. טרנזיטיבי ($R\circ R\subseteq R$).

דוגמאות.

דוגמה 1. יחס הזהות i_X הינו יחס שקילות מעל קבוצה X כי הוא מקיים את כל התנאים א'-ג'.

דוגמה 2. $X=\{1,2,3,4,5\}$ ו $R=\begin{pmatrix}1&1&2&2&3&3&3&4&4&4&5&5&5\\1&2&1&2&3&4&5&3&4&5&3&4&5\end{pmatrix}$.
קל לבדוק שהיחס מקיים את כל תכונות של יחס שקילות.

דוגמה 3. תהא X קבוצה של כל המשולשים של המישור. נגדיר יחס בינארי מעל X: שני משולשים $\Delta ABC,\Delta DEF$ נמצאים ביחס כאשר הם חופפים (סימון $\Delta ABC\cong\Delta DEF$).

הגדרה. תהא X קבוצה כלשהי (לא ריקה). אוסף $X_1,...,X_k$ של תת-קבוצות של X ניקרא <u>חלוקה של X</u> כאשר הוא מקיים את התנאים הבאים

א. כל תת-קבוצה מהאוסף $X_1,...,X_k$ איננה ריקה.

ב. הקבוצה $X_1,...,X_k$ זרות זו לזו.

ג. איחודם של הקבוצות $X_1,...,X_k$ שווה ל- X.

דוגמאות

דוגמה 1. הקבוצות $X_1=\{1,2\},X_2=\{3,4,5\}$ מהוות חלוקה של הקבוצה $X=\{1,2,3,4,5\}$ לאיחוד של 2 מחלקות.

דוגמה 2. הקבוצות $X_1=\{1,2,3\},X_2=\{3,4,5\}$ לא יוצרות חלוקה, כי הן לא זרות.

דוגמה 3. הקבוצות $X_1=\{1,2\},X_2=\{3,4\}$ לא מהוות חלוקה של הקבוצה $X=\{1,2,3,4,5\}$ כי איחודם לא שווה ל-X.

תהא $X_1,...,X_k$ חלוקה כלשהי של קבוצה X. נגדיר יחס בינארי R מעל X באופן הבא: הזוג $(x,y)\in X\times X$ יחס אם ורק אם האיברים x,y שייכים לאותה מחלקה של החלוקה.

טענה. היחס R המוגדר לעיל הינו יחס שקילות.

הגדרה. יהי R יחס שקילות המוגדר מעל קבוצה X. <u>מחלקת שקילות של R הנוצרת ע"י איבר $x\in X$</u> (סימון $[x]_R$) היא קבוצה המורכבת מכל האיברים $y\in X$ המקיימים $(x,y)\in R$ (במילי אחרות המחלקה $[x]_R$ מכילה את כל האיברים $y\in X$ הנמצאים עם x ביחס R).
הגדרה פורמלית: $y\in[x]_R\Leftrightarrow(x,y)\in R$.

למשל, בדוגמה 2:
$[1]_R=\{1,2\},[2]_R=\{2,1\},[3]_R=\{3,4,5\},[4]_R=\{4,5,3\},[5]_R=\{5,3,4\}$.

טענה. יהי R יחס שקילות המוגדר מעל קבוצה X. אזי

א. לכל $x\in X$ מתקיים $x\in[x]_R$ (כל איבר שייך למחלקה הנוצרת על-ידו).

ב. לכל $x\in X$ ולכל $y\in[x]_R$ מתקיים $[y]_R=[x]_R$.

ג. לכל $x,y\in X$ מתקיים $[y]_R=[x]_R\vee[y]_R\cap[x]_R=\varnothing$ (כל שתי מחלקות או שוות או זרות).

ד. מחלקות השקילות של R יוצרות חלוקה שלX.

ה. $(x,y)\in R\Leftrightarrow[x]_R=[y]_R$.