יום א ח תמוז התשס"ד, 27-6-2004 .

מבחן סופי בקורס מרוכבות. מועד א. מורה : גיורא דולה.

משך המבחן שעתים וחצי. המבחן הוא עם כל חומר עזר.

רשום את התשובות במחברת.

המבחן כולל 8 שאלות שוות ערך. ענה/י כמה שתוכל.   <u>בהצלחה.</u>

שאלה 1

חשב את
$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^{12}+65x^6+64}$$

תשובה תוך שמוש ברקובות: המכנה שוה ל-
$(x^6+1)(x^6+64)= (x^3-i)(x^3+i)(x^3-8i)(x^3+8i)=(x-cis(30))(x-cis(150))(x-cis(270))(x-cis(90))(x-cis(210))(x-cis(330))\ (x-2cis(30))(x-2cis(150))(x-2cis(270))(x-2cis(90))(x-2cis(210))(x-2cis(330))$ .. ..
נתיחס לתחום במישור הכלוא על ידי הציר הממשי מ-R- עד R ומשם בחצי מעגל.
עבור R גדול מספיק לאינטגרנד יש ששה קטבים פשוטים בתחום הכלוא,
$x=rcisa$ כאשר $r=1,2$ $a=30,90,150$ לכן לפי משפט השארית האינטגרל שוה
ל-$2\pi i$ כפול סכום השאריות של האינטגרנד בקטבים אלו.
אז:

$$res(z=cis(30))=\lim_{z\to cis(30)}\frac{z-cis(30)}{(z^3-i)(z^3+i)(z^6+64)}=$$

$$=\lim_{z\to cis(30)}\frac{z-cis(30))}{(z^3-i)(i+i)(-1+64)}=\lim_{z\to cis(30)}\frac{z-cis(30))}{(z^3-i)2i\cdot 63}$$

זאת כיון ששרש זה מקים כי $z^6+1=0,z^3-i=0$. לכן נותר לחשב את השארית של נקודה זו ביחס לפונקציה $1/(z^3-i)$. עבור נקודה זו ופונקציה זו נחשב לפי כלל ל-הופיטל ונקבל:

$$res(z=cis(30))=\lim_{z\to cis(30)}\frac{z-cis(30)}{(z^3-i)}=$$

$$=\lim_{z\to cis(30)}\frac{1}{3z^2}=\frac{1}{3cis60}$$

ובסך הכל נקבל:

$$res(z=cis(30))=\frac{1}{378icis(60)}=\frac{cis(300)}{378i}$$

בצורה דומה נקבל כי:

$$res(z=cis(150))=\frac{1}{378icis(300)}=\frac{cis(60)}{378i}$$

וכנ"ל:

$$res(z=cis(270))=\frac{1}{378icis(180)}=\frac{cis(180)}{378i}$$

ולכן סכום שלש השאריות הללו הוא:

$$\frac{cis(60)+cis(180)+cis(300)}{378i}=0$$

ולכן כיון שמסלול האינטגרל אינו כולל את השארית השלישית, נקבל:

$$res(z=cis(30))+res(z=cis(150))=-res(z=cis(270))=$$

$$\frac{-cis(180)}{378i}=\frac{1}{378i}=\frac{-i}{378}$$

בצורה דומה נקבל:

$$res(z=cis(90))=\lim_{z\to cis(90)}\frac{z-cis(90)}{(z^3-i)(z^3+i)(z^6+64)}=$$

$$=\lim_{z\to cis(90)}\frac{z-cis(90))}{(z^3+i)(-i-i)(-1+64)}=\frac{1}{3(cis(90))^2(-2i)63}=$$

$$=\frac{-1}{378i(-1)}=\frac{-i}{378}$$

כעת נותר לחשב את השאריות עבור הנקודות עם r=2 . נקבל:

$$res(z=2cis(30))=\lim_{z\to 2cis(30)}\frac{z-2cis(30)}{(z^3-8i)(z^3+8i)(z^6+1)}=$$

$$=\lim_{z\to 2cis(30)}\frac{z-2cis(30))}{(z^3-8i)(8i+8i)(-64+1)}=$$

$$\frac{-1}{1008i}\lim_{z\to 2cis(30)}\frac{z-2cis(30))}{(z^3-8i)}=\frac{-1}{1008i}\frac{1}{3(2cis(30))^2}=$$

$$\frac{-cis(-60)}{12096i}=\frac{icis(-60)}{12096}$$

ובצורה דומה:

$$res(z=2cis(150))=\frac{-1}{1008i}\frac{1}{3(2cis(150))^2}=$$

$$\frac{-cis(60)}{12096i}=\frac{icis(60)}{12096}$$

ולכן סכום שני אלו הוא:

$$\frac{icis(60)}{12096}+\frac{icis(-60)}{12096}=\frac{-icis(180)}{12096}=\frac{i}{12096}$$

ובדומה לכך,

$$res(z=2cis(90))=\lim_{z\to 2cis(90)}\frac{z-2cis(90))}{(-8i-8i)(z^{3}+8i)(-64+1)}=$$

$$\frac{-1}{1008i}\lim_{z\to 2cis(90)}\frac{z-2cis(90))}{(z^{3}-8i)}=\frac{1}{1008i}\frac{1}{3(2cis(90))^{2}}=$$

$$=\frac{-icis(180)}{12096}=\frac{i}{12096}$$

ולכן סכום השאריות הוא:

$$\frac{i}{12096}+\frac{i}{12096}-\frac{i}{378}-\frac{i}{378}=\frac{i}{6048}-\frac{i}{189}=-\frac{31i}{6048}$$

וסוף סוף:

$$\cdots\frac{dx}{\cdots 5x^{6}+64}=\frac{-2\pi i31i}{6048}=\frac{31\pi}{3024},\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^{12}+65x^{6}+64}=\frac{31\pi}{6048}$$

שאלה 2

חשב את

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^3(t)dt}{\sin^2(t)+5\cos^2(t)-1}$$

תשובות: פתרון בדרך ראשונה: נפריד לשני קטעים, [0, π] ו- [π,2π]

: על הקטע השני נבצע חלוף משתנה s=t+π אז על קטע זה ,
cos(s)=-cos(t) , sin(s)=-sin(t) , ds=dt, זאת נציב בקטע השני ונקבל כי האינטגרנד הוא הנגדי של האינטגרנד הראשון, ולכן, הסכום, המבטא את האינטגרל המקורי הוא 0 .

פתרון בדרך שניה:: נגדיר החלפת משתנה, $z=\cos(t)$ ואז $dz=-\sin(t)dt$
והאינטגרד הופך להיות $(1-z^2)dz/4z^2$. כמו כן ההשתנות של t , $t\in[0,2\pi]$
הופכת להיות השתנות של z , $z\in[1,1]$. ולכן האינטגרל הוא 0 .

פתרון בדרך מרוכבת: נציב $z=e^{it}$ עבור $0\le t\le 2\pi$. אז מתקים $|z|=1$ וכמו כן
$dz=izdt$. ונקבל:

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{\sin^3(t)dt}{\sin^2(t)+5\cos^2(t)-1}=\int_{|z|=1}\frac{(z^2-1/2iz ...}{(z^2-1/2iz)^2+5(z^2 ...}$$

$$=\int_{|z|=1}\frac{(z^2-1)^3}{-(z^2-1)^2+5(z^2+1)^2-4z^2}\frac{dz}{2i^3ziz}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{|z|=1}\frac{(z^2-1)^3dz}{z^2(4z^4+8z^2+4)}=\frac{1}{8}\int_{|z|=1}\frac{(z^2-1)^3dz}{z^2(z^2+1)^2}.$$

לאינטגרנד יש שלשה קטבים, 0 ו $\pm i$ וכלם מסדר שני : נחשב את השאריות,
נסכם, נכפל ב-$2\pi i$ ונקבל את האינטגרל.

כדי לחשב את השארית של האינטגרנד סביב 0 , נפתח את המכנים.

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 - \cdots.$$

ולכן :

$$\left(\frac{1}{1+z^2}\right)^2 = 1 - 2z^2 + 3z^4 \cdots.$$

ולכן פתוח לורן של הפונקציה סביב 0 מכיל רק את המעריכים -2, 0, 2, 4 וכד',
ולכן השארית סביב 0 היא 0 . נביט סביב i . אז הבטוי הופך ל-

$$\cdots i)^2 = -\frac{1}{\left(\frac{z-i}{i}+1\right)^2} = -[1-\left(\frac{z-i}{i}\right)+\left(\frac{z-i}{i}\right)^2 - \cdots]^2.$$

ולכן הבטוי מכיל רק חזקות זוגיות של z-i . באותה צורה:

$$\frac{1}{(z+i)^2} = \frac{1}{(z-i+2i)^2} = -\frac{1}{4\left(\frac{z-i}{2i}+1\right)^2} =$$

$$-0.25[1-\left(\frac{z-i}{2i}\right)+\left(\frac{z-i}{2i}\right)^2 - \cdots]^2.$$

כלומר, כל פתוחי לורן סביב הקטב מכילים חזקות זוגיות בלבד. באותה צורה סביב –i נקבל רק חזקות זוגיות, ולכן שלש השאריות הן 0 , וכזה גם סכומם וגם האינטגרל.

שאלה 3

פתח את הפונקציה f לטור לורן סביב כל קטב שלה.

$$f = \frac{1}{z^2 + 4z + 5}$$

תשובה:

$$z+2)^2 + 1 = (z+2+i)(z+2-i).$$

נפתח את הפונקציה סביב –(2+i).

$$\frac{1}{z+2+i)(z+2+i-2i)}$$

$$= \frac{i}{2(z+2+i)(1-{(z+2+i)}/{2i})} =$$

$$/2i) + ({w}/{2i})^2 + \cdots) =$$

כעת נפתח את הפונקציה סביב (2-i)–.

$$\frac{1}{z+2-i)(z+2-i+2i)}$$

$$=\frac{-i}{2(z+2-i)\left(1+{(z+2-i)}\big/{2i}\right)}=$$

$$\big/2+\left({iw}\big/{2}\right)^2+\cdots\Big)=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\left({iw}\big/{2}\right)^{k-1}.$$

שאלה 4

חשב את התמונה של המלבן שקדקדיו $0,i,\pi/2,\pi/2+i$ על ידי הפונקציה sinus.
כתוב את המשוואות של העקומים אשר תוחמים את התמונה.

תשובה: הקטע הממשי $[0,\pi/2]$ עובר עלידי הפונקציה sin לקטע הממשי $[0,1]$.
על הקטע המדומה $[0,i]$ נקבל

$$\sin(it)=\frac{e^{i(it)}-e^{-i(it)}}{2i}=i\,\frac{e^{t}-e^{-t}}{2}=i\sinh(t).$$ נגזרת

הסינוס ההיפרבולי היא הקוסינוס ההיפרבולי והיא חיובית, ולכן על הקטע המדומה [0,i] תמונת הסינוס היא הקטע המרוכב $[0,i(e^2-1)/2e]$. הזהות $\sin(it+\pi/2)=\cos(it)=(e^t+e^{-t})/2=\cosh(t)$ נותנת את תמונת הסינוס על הקטע $[\pi/2, \pi/2+i]$. נגזרת הקוסינוס ההיפרבולי היא sinh שהיא חיובית עבור משתנה ממשי. לכן נקבל כי תמונת קטע זה היא הקטע הממשי $[1,(e^2+1)/2e]$.

נותר הקטע $[i,i+\pi/2]$

$$\sin(i+t\,{}^{\pi}\!/_{2})=\sin(i)\cos(t\,{}^{\pi}\!/_{2})+\cos(i)\sin(t\,{}^{\pi}\!/_{2})=$$

$$\frac{e^{i(i)}-e^{-i(i)}}{2i}\cos(t\,{}^{\pi}\!/_{2})+\frac{e^{i(i)}+e^{-i(i)}}{2}\sin(t\,{}^{\pi}\!/_{2})=$$

$$=i\,\frac{e^{2}-1}{2e}\cos(t\,{}^{\pi}\!/_{2})+\frac{e^{2}+1}{2e}\sin(t\,{}^{\pi}\!/_{2}).$$

זוהי משואת אליפסה שאורך בסיסה הגדול –ציר x הוא $(e^2+1)/e$, ואורך בסיסה הקטן- ציר y הוא $(e^2-1)/e$. מסקנה: התמונה היא רבע אליפסה, מימין לציר y , ומעל ציר x. הקוים המגבילים הם: החלק ברביע הראשון של $x^2/((e^2+1)/e)^2+y^2/((e^2+1)/e)^2=1$, וכן חלקים מצירי x,y החיוביים.

שאלה 5

מצא את תמונת העגול שמרכזו (0,-5/3) ו מחוגו 4/3 על ידי הפונקציה arccot , ובטא את משואות הקוים התוחמים את התחום.

תשובה:

$$x^2+(y+5/3)^2\le 16/9 \Rightarrow 9x^2+9y^2+30y+25\le 16$$

$$9x^2+9y^2+30y+9\le 0 \Rightarrow 3x^2+3y^2+10y+3\le 0$$

$$3(x^2+y^2+1)\le -10y \Rightarrow 3(z\bar{z}+i\bar{i})\le 5(iz+\overline{iz})$$

$$(4-1)(z\bar{z}+i\bar{i})\le(4+1)(iz+\overline{iz})\Rightarrow$$
$$4(z\bar{z}+i\bar{i}-iz-\overline{iz})\le(iz+\overline{iz}+z\bar{z}+i\bar{i})$$

$$4(z(\bar{z}-i)-\bar{i}(\bar{z}-i))\le z(i+\bar{z})+\bar{i}(i+\bar{z})\Rightarrow$$
$$4(z-\bar{i})(\bar{z}-i)\le(z+\bar{i})(i+\bar{z})$$

$$4\le\frac{(z+\bar{i})}{(z-\bar{i})}\frac{(i+\bar{z})}{(\bar{z}-i)}\Rightarrow 1\le\frac{(z-i)}{2(z+i)}[\overline{\frac{(z-i)}{2(z+i)}}]$$

$$2\le\left|\frac{(z-i)}{(z+i)}\right|\Rightarrow\left|\frac{(z+i)}{(z-i)}\right|\le\frac{1}{2}\Rightarrow\ln\left|\frac{(z+i)}{(z-i)}\right|\le-\ln 2.$$

והארגומנט של (z+i)/(z-i) אינו מוגבל. לכן פונקצית הln המרוכבת מקבלת את ערכי חצי המישור x<-ln2.

לכן:

$$arc\cot(z)=\frac{1}{2i}\ln\frac{(z+i)}{(z-i)}.$$

מקימת כי היא נמצאת על חצי המישור $(\ln 2)/2<y$

שאלה 6

הוכח את משפט הארגומנט מתוך משפט השארית.

תשובה

נוכיח כי סביב כל 0 מסדר n של f יש ל- f`/f שארית n כי סביב כל קטב של f מסדר n יש ל-f`/f שארית n -, וכי סביב כל נקודה של f שאינה 0 או קטב, f`/f רגולרית.

אם a היא שרש מסדר n אז $f=(x-a)^n g(x)$ כך ש-$g(a)\neq 0$. אז $f`=n(x-a)^{n-1}g(x)+(x-a)^n g`(x)$, ולכן $f`/f=( n(x-a)^{n-1}g(x)+(x-a)^n g`(x))/((x-a)^n g(x))=n/(x-a)+g`(x)/g(x)$ כלומר זהו קטב עם שארית n .

אם a היא קטב מסדר n אז $f= g(x)/(x-a)^n$ כך ש-$g(a)\neq 0$. אז $f`=-ng(x)/(x-a)^{-n-1}+g\ `(x)/ (x-a)^n$, ולכן $f`/f=(-ng(x)/(x-a)^{-n-1}+g`(x)/(x-a)^n)/(g(x)/(x-a)^n)=-n/(x-a)+g`(x)/g(x)$ כלומר זהו קטב עם שארית n -.

אם a נקודת רגולריות של f ו-`f אז קים פתוחי טיילור $f(a+h)=f(a)+f`(a)h+\ldots$ $f(a)\neq 0$ וכמו כן, $f`(a+h)=f`(a)+2f``(a)h+\ldots$, ולכן נקבל $f`/f=(f`(a)+2f``(a)h+\ldots)/(f(a)+f`(a)h+\ldots)$. נחלק את הבטוי ב- $f(a)\neq 0$ונקבל:

$$f`/f= [(f`(a)+2f``(a)h+\ldots)]/[(f(a))(1+\{f`(a)/f(a)\}h+\ldots)] =$$
$$=[(f`(a)+2f``(a)h+\ldots)]/[(f(a))(1+x)]=$$
$$=[(f`(a)+2f``(a)h+\ldots)][-x+x^2-x^3+\ldots]/f(a) =$$

וזהו פתוח טיילור כלומר זוהי נקודה רגולרית.

שאלה 7

בטא את המשואה $(4+3)x^2-6\sqrt{3}xy+(12+1)y^2=16$ בצורה מרוכבת:

תשובה

$$(4+3)x^2-6\sqrt{3}xy+(1+12)y^2=16 \Rightarrow$$

$$4x^2+12y^2+3x^2+y^2-6\sqrt{3}xy=16.$$

$$\ldots^2+3y^2)+(3x^2+y^2)-6\sqrt{3}xy=16 \Rightarrow$$

$$\ldots-\sqrt{3}y)^2+(\sqrt{3}x+y)^2+8\sqrt{3}xy-2\sqrt{3}xy-6\sqrt{3}xy=16.$$

$$\frac{(x-\sqrt{3}y)^2}{4}+\frac{(\sqrt{3}x+y)^2}{16}=1\Rightarrow$$

$$\frac{(x-\sqrt{3}y)^2 / 4}{1}+\frac{(\sqrt{3}x+y)^2 / 4}{4}=1.$$

נביט על המספר המרכב $w=(1+\sqrt{3}i)/2=cis(60)$. אז $(x+iy)w=(x-\sqrt{3}y)/2+i(\sqrt{3}x+y)/2=zw=zcis(60)$. , כלומר רכיבי המספר האחרון נמצאים על אליפסה רגילה שארכי ציריה הם 2 ו-8 ולכן $c^2=16-4=12$ מתקים עבורה. לכן משואתה המרוכבת של האליפסה הרגילה היא $|z-\sqrt{(12)}|+|z+\sqrt{(12)}|=8$, ולכן המשואה הדרושה היא $|zw-\sqrt{(12)}|+|zw+\sqrt{(12)}|=8$.

שאלה 8

הבט במשואה $z^5+32=0$ וסמן את שרשיה שאינם ממשיים על ידי a,b,c,d .
חשב את $a+b+c+d$ ואת $abc+abd+acd+bcd$.

תשובה:

הדרך הארוכה: נקבל $z^5=-32=32cis(180)$ ולכן השרשים הם $w1=2cis(36),w2=2cis(108),w3=2cis(180)=-2,$ $w4=2cis(252),w5=2cis(324)$, ולכן נקבל כי $a+b+c+d=w1+w2+w4+w5=-w3=2$.
$abc=8cis(36)=4a,abd=8cis(108)=4b,acd=8cis(252)=4c,bcd=8cis(324)=4d$ ולכן נקבל כי $abc+abd+acd+bcd=-8cis(180)=4(a+b+c+d)=8$

הדרך הקצרה: נחלק את הפולינום z^5+8 בפולינום $z+2$ ונקבל $z^4-2z^3+4z^2-8z+16$. אז $a+b+c+d=2,abc+abc+acd+bcd=8$