יום ג כד סיון התשס"ג, 24-6-2003 .

מבחן סופי בקורס מרוכבות. מועד א. מורה : גיורא דולה.

משך המבחן שעתים וחצי. המבחן הוא עם כל חומר עזר.

רשום את התשובות במחברת.

המבחן כולל 8 שאלות שוות ערך. ענה/י כמה שתוכל. <u>בהצלחה.</u>

שאלה 1

חשב את $\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+5x^2+4}$

תשובה תוך שמוש ברקובות: המכנה שוה ל-$(x^2+1)(x^2+4)$. נתיחס לתחום במישור הכלוא על ידי הציר הממשי מ-R- עד R ומשם בחצי מעגל. עבור R גדול מספיק לאינטגרנד יש שני קטבים פשוטים בתחום הכלוא, x=i,2i. לכן לפי משפט השארית האינטגרל שוה ל-$2\pi i$ כפול סכום השאריות של האינטגרנד בקטבים.

אז:

$$res(z=i)=\lim_{z\to i}\frac{z-i}{(z^2+1)(z^2+4)}=$$

$$=\lim_{z\to i}\frac{1}{(z+i)(z^2+4)}=\frac{1}{6i}$$

וכנ"ל:

$$res(z=2i)=\lim_{z\to 2i}\frac{z-2i}{(z^2+1)(z^2+4)}=$$

$$=\lim_{z\to 2i}\frac{1}{(z+2i)(z^2+1)}=-\frac{1}{12i}$$

ולכן

$$res(z=i)+res(s=2i)=\frac{1}{6i}-\frac{1}{12i}=\frac{1}{12i}.$$

ולכן:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+5x^2+4}=\frac{2\pi i}{12i}=\frac{\pi}{6},\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^4+5x^2+4}=\frac{\pi}{12}$$

שאלה 2

חשב את

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin(t)dt}{2+\sin(t)+\cos(t)}$$

תשובה: נציב $z=e^{it}$ עבור $0\le t\le 2\pi$. אז מתקים $|z|=1$ וכמו כן $dz=izdt$ ונקבל:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\sin(t)dt}{2+\sin(t)+\cos(t)} = \int_{|z|=1} \frac{z-z^{-1}/2i}{2+(z-z^{-1}/2i)+(z+$$

$$= \int_{|z|=1} \frac{z^2-1/2iz}{2+(z^2-1/2iz)+(z^2+1/2z)} \frac{dz}{iz} =$$

$$= -i \int_{|z|=1} \frac{(z^2-1)dz}{z(4iz+(z^2-1)+i(z^2+1))}.$$

נמשיך ונפתח את האיטגרל:

$$I = -i \int_{|z|=1} \frac{(z^2-1)dz}{z(4iz + (z^2-1) + i(z^2+1))} =$$

$$= -i \int_{|z|=1} \frac{(z^2-1)dz}{z(z^2(1+i) + 4iz + (-1+i))} =$$

$$= \frac{-i}{1+i} \int_{|z|=1} \frac{(z^2-1)dz}{z(z^2 + \frac{4i}{1+i} z + \frac{-1+i}{1+i})} =$$

$$= \frac{-i(1-i)}{2} \int_{|z|=1} \frac{(z^2-1)dz}{z(z^2 + 2i(1-i)z + \frac{(-1+i)(1-i)}{2})} =$$

$$= \frac{-(1+i)}{2} \int_{|z|=1} \frac{(z^2-1)dz}{z(z^2 + 2(1+i)z + i)}.$$

נמצא את שרשי המכנה:

$$\frac{-2(1+i) \pm 2\sqrt{(1+i)^2 - i}}{2} = -(1+i) \pm \sqrt{i} =$$

$$= -(1+i) \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}} = (1+i)(-1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{-(1+i)(\sqrt{2} \pm 1)}{\sqrt{2}}.$$

נשים לב כי

$|-\frac{(1+i)}{\sqrt{2}}|=1.$ ולכן, השרש היחיד של הפולינום בתחום הוא זה עם המינוס.

לכן ישנם שני קטבים של f בתחום הכלוא, ונחשב את השאריות שלהם. בנקודה $\frac{-(1+i)(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}$ נקבל את הבטוי:

$\frac{z^2-1}{z(z+\frac{(1+i)(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}})}$. בבטוי זה יש להציב את השרש. בבטוי הארוך שבמכנה, נקבל את הפרש השרשים וזהו $\sqrt{2}(1+i)$. בבטוי z שבמכנה, נקבל את השרש. לכן המכנה שוה לבטוי:

$-\frac{(1+i)(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}\bullet\sqrt{2}(1+i)=-2i(\sqrt{2}-1).$. נעלה את השרש

ברבוע ונחסר אחד ונקבל: $\frac{2i(3-2\sqrt{2})}{2}-1=i(3-2\sqrt{2})-1$ ולכן

נקבל את השארית בנקודה:

$$-\frac{i(3-2\sqrt{2})-1}{2i(\sqrt{2}-1)}=-\frac{(-i)[i(3-2\sqrt{2})-1]}{(-i)2i(\sqrt{2}-1)}=$$

$$=-\frac{(3-2\sqrt{2})+i}{2(\sqrt{2}-1)}=-\frac{(\sqrt{2}+1)[(3-2\sqrt{2})+i]}{(\sqrt{2}+1)2(\sqrt{2}-1)}=$$

$$-\frac{(3\sqrt{2}-4+3-2\sqrt{2})+(\sqrt{2}+1)i}{2}=-\frac{(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}+1)i}{2}$$

השארית ב-0 היא -1/i=i ולכן סכום השאריות הוא:

$$-\frac{(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}+1)i}{2}+i=-\frac{(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}-1)i}{2}=$$

$$-\frac{(\sqrt{2}-1)(1+i)}{2}.$$

בטוי זה נכפל ב-2πi ובמקדם של האינטגרל ונקבל:

$$-\frac{(\sqrt{2}-1)(1+i)}{2}\bullet-\frac{1+i}{2}\bullet 2\pi i=$$

$$\frac{-4\pi(\sqrt{2}-1)}{4}=-\pi(\sqrt{2}-1).$$

שאלה 3

חשב את $\oint\limits_{|z|=1}\frac{16+8z+4z^2+2z^3+z^4}{(z-2)^6}dz$

תשובה: המונה הוא טור גיאומטרי, ולכן האינגרנד יוצא $\frac{z^5-32}{(z-2)^7}$.

אינטגרל זה יוצא 0 כי האינטגרנד היא פונקציה אנליטית על המסלול ועל התחום שהוא כולא.

שאלה 4

פתח את $1/(z^4-1)$ לטור לורן סביב $a=1$. מספיק לתת את שלשת האיברים הראשונים.

תשובה: נפרק את המכנה ל- $(z^2+1)(z^2-1)=(z-i)(z+i)(z-1)(z+1)$

ולכן: $\frac{1}{z^4-1}=\frac{1}{z-1}\frac{1}{z+1}\frac{1}{z-i}\frac{1}{z+i}$ מטרתנו, לבטא את צד ימין בחזקות של $u=z-1$. ונקבל

$$\frac{1}{z^4-1}=\frac{1}{z-1}\frac{1}{z+1}\frac{1}{z-i}\frac{1}{z+i}=$$

$$=\frac{1}{u}\frac{1}{u+2}\frac{1}{u+(1-i)}\frac{1}{u+(1+i)}=$$

$$\frac{1}{2(1-i)(1+i)}\frac{1}{u}\frac{1}{1+{u}/{2}}\frac{1}{1+{u}/{1-i}}\frac{1}{1+{u}/{1+i}}=$$

$$=\frac{1}{4u}\frac{1}{1+{u}/{2}}\frac{1}{1+{u}/{1-i}}\frac{1}{1+{u}/{1+i}}.$$

נפתח כל טור לפי הנוסחה: $1/(1+w)=1-w+w^2-w^3+\ldots$, ונקבל:

$$\frac{1}{z^4-1}=\frac{1}{4u}(1-u/2+u^2/4-\cdots)\bullet$$

$$(1-u/1-i+u^2/(1-i)^2-\cdots)(1-u/1+i+u^2/(1+i)^2-\cdots).$$

וכעת נבצע כפל איבר איבר של הטורים עד סדר שלש כולל. נכפל שנים מתוך השלשה:

$$(1-u/1-i+u^2/(1-i)^2-\cdots)(1-u/1+i+u^2/(1+i)^2-\cdots)=$$

$$=1-u(\frac{1}{1-i}+\frac{1}{1+i})+u^2(\frac{1}{2i}+\frac{1}{-2i}+\frac{1}{2})-\cdots=$$

$$=1-u+u^2/2-\cdots.$$

וכעת נכפל עם השלישי ונקבל:

$$(1-u/2+u^2/4-\cdots)\bullet(1-u+u^2/2-\cdots)=.$$

$$=1-u(\frac{1}{2}+1)+u^2(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2})-\cdots=$$

$$1-\frac{3u}{2}+\frac{5u^2}{4}+\cdots.$$

וכעת נקבל סוף סוף את טור לורן:

$$\frac{1}{4u} - \frac{3}{8} + \frac{5u}{16} + \cdots.$$

בדיקה: נבדק את החשבויינעס על ידי זה שנחשב את השארית. אז

$$\frac{z-1}{z^4-1} = \frac{1}{z^3+z^2+z+1} \xrightarrow[z\to 1]{} \frac{1}{4}$$ וקבלנו אותה שארית.

כעת נגזר את הבטוי האחרון ונשאיף לאחד, ונקבל:

$$\frac{1}{z^3+z^2+z+1})' = -\frac{3z^2+2z+1}{(z^3+z^2+z+1)^2} \xrightarrow[z\to 1]{} -\frac{6}{16} = -\frac{3}{8}$$

וזהו האבר מהסדר הבא. כעת נגזר את הבטוי הקודם, נחלק ב-2 ונשאיף לגבול ונקבל:

$$\frac{2z+1}{+z+1)^2})' =$$

$$\frac{2)((z^3+z^2+z+1)^2) - 2(z^3+z^2+z+1)(3z^2+2z+1)^2}{(z^3+z^2+z+1)^4} =$$

$$\frac{+2)}{+z+1)^2} + \frac{2(3z^2+2z+1)^2}{(z^3+z^2+z+1)^3} = \xrightarrow[z\to 1]{}$$

$$= \frac{40}{64} = \frac{5}{8}$$

ואם נחלק ב-2 נקבל את המקדם הרצוי.

תרגיל 5 .

חשב את התמונה של המלבן שקדקדיו 0,i,π,π+i על ידי הפונקציה .sinus

תשובה: הקטע הממשי [0, π] עובר עלידי הפונקציה sin (פעמים) לקטע הממשי [0,1] . על הקטע המדומה [0,i] נקבל

$$\sin(it)=\frac{e^{i(it)}-e^{-i(it)}}{2i}=i\,\frac{e^{t}-e^{-t}}{2}=i\sinh(t).$$ נגזרת

הסינוס ההיפרבולי היא הקוסינוס ההיפרבולי והיא חיובית, ולכן על הקטע המדומה [0,i] תמונת הסינוס היא הקטע המדומה $[0,i(e^2-1)/2e]$. הזהות sin(z+ π)=-sinz נותנת את תמונת הסינוס על הקטע [π, π+i] . נקבל:

$$\sin(it+\pi)=-\sin(it)=-\frac{e^{i(it)}-e^{-i(it)}}{2i}=-i\,\frac{e^{t}-e^{-t}}{2}=-i\sinh(t).$$

נגזרת הסינוס ההיפרבולי חיובית כפי שראינו. לכן נקבל כי תמונת קטע זה היא הקטע המדומה $[0,-i(e^2-1)/2e]$. נותר הקטע [i,i+ π]

$$\sin(i+t\pi)=\sin(i)\cos(t\pi)+\cos(i)\sin(t\pi)=$$

$$\frac{e^{i(i)}-e^{-i(i)}}{2i}\cos(t\pi)+\frac{e^{i(i)}+e^{-i(i)}}{2}\sin(t\pi)=$$

$$=i\,\frac{e^{2}-1}{2e}\cos(t\pi)+\frac{e^{2}+1}{2e}\sin(t\pi).$$

זוהי משואת אליפסה שאורך בסיסה הגדול –ציר x הוא $(e^2+1)/e$, ואורך בסיסה הקטן- ציר y הוא $(e^2-1)/e$. מסקנה: התמונה היא חצי אליפסה, מימין לציר y .

שאלה 6
בטא את המשואה $82x^2-36xy+82y^2=1600$ בצורה מרוכבת: רמז: $82=50+32$, $36=2(50-32)$, $1600=50\bullet 32$.

תשובה

$$(50+32)x^2-2(50-32)xy+(50+32)y^2=1600.$$

נקבץ איברים ונקבל:

$$50(x^2-2xy+y^2)+32(x^2+2xy+y^2)=1600.$$

נרכז חזקות ונחלק ב-1600 ונקבל:

$$\frac{(y-x)^2}{32}+\frac{(x+y)^2}{50}=1.$$

נוציא גורם 2 ונקבל:

$$\frac{\left({}^{y-x}\!/_{\sqrt{2}}\right)^2}{16}+\frac{\left({}^{x+y}\!/_{\sqrt{2}}\right)^2}{25}=1.$$

נביט על המספר המרכב $w=(x+y)/\sqrt{2}+i(y-x)/\sqrt{2}$. אז רכיבי w מקימים משואת אליפסה, עם ציר גדול השוה 10 וציר קטן 8 ולכן המרחק בין המוקדים הוא 6 . לכן המשואה שמקים w היא $|w-3|+|w+3|=10$. נביט על

$$\frac{1-i}{\sqrt{2}}(x+iy)=\frac{(x+y)}{\sqrt{2}}+i\frac{(y-x)}{\sqrt{2}}$$

. המספר הכופל את z הוא $cis(-45)$. ולכן המשואה היא $|cis(-45)z-3|+|cis(-45)z+3|=10$.

שאלה 7

הבט במשואה $z^3+3z^2+16z-20=0$ וסמן את שרשיה על ידי a,b,c . חשב את $a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}$ ואת $(ab)^{-1}+(ac)^{-1}+(bc)^{-1}$.

תשובה: נניח כי המשואה המקורית היא מהצורה $(z-a)(z-b)(z-c)$. אז $-a-b-c=3$ וכן $ab+ac+bc=16$ וכן $-abc=-20$. לכן

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}=\frac{a+b+c}{abc}=\frac{-3}{20}$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ac}{abc}=\frac{16}{20}$$

שאלה 8 :

א. הוכח את השויון

$$\arccos(z)=-i\ln(z+\sqrt{z^2-1})$$

ב. חשב את $\arctan(z)$.

תשובה א . נסמן $w=\arcos(z)$ ואז $z=\cos(w)$. לכן:

$$z=\frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}$$

לכן:

$$z^2-1=\frac{e^{2iw}+e^{-2iw}+2}{4}-\frac{4}{4}=\frac{e^{2iw}+e^{-2iw}-2}{4}$$

לכן:

$$z+\sqrt{z^2-1}=\frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}+\frac{e^{iw}-e^{-2iw}}{2}=e^{iw}$$

לכן : $\ln(z+\sqrt{z^2-1})=iw$ נכפל ב –i ונקבל:

$$-i\ln(z+\sqrt{z^2-1})=w=\arccos(z)$$

תשובה ל-ב:

נסמן w=arctan(z) ואז tan(w)=z ונקבל:

$$z=\tan(w)=\frac{\sin(w)}{\cos(w)}=\frac{e^{iw}-e^{-iw}\big/2i}{e^{iw}+e^{-iw}\big/2}=-i\,\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{e^{iw}+e^{-iw}}$$

אז:

$$z+i=i-i\,\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{e^{iw}+e^{-iw}}=i\,\frac{(e^{iw}+e^{-iw})-(e^{iw}-e^{-iw})}{e^{iw}+e^{-iw}}=$$

$$=2i\,\frac{e^{-iw}}{e^{iw}+e^{-iw}}$$

ובצורה דומה:

$$z - i = -i - i\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{e^{iw}+e^{-iw}} = -i\frac{(e^{iw}+e^{-iw})+(e^{iw}-e^{-iw})}{e^{iw}+e^{-iw}} =$$

$$= -2i\frac{e^{iw}}{e^{iw}+e^{-iw}}$$

ולכן:

$$\frac{z-i}{z+i} = \frac{-2i}{2i}\frac{e^{iw}\big/\left(e^{iw}+e^{-iw}\right)}{e^{-iw}\big/\left(e^{iw}+e^{-iw}\right)} = -\frac{e^{iw}}{e^{-iw}} = -e^{2iw}$$

נכפל ב-מינוס ונקבל:

$$e^{2iw} = \frac{i-z}{i+z}$$

נוציא לוג ונחלק

ונקבל:

$$\arctan(z) = w = \frac{1}{2i}\ln\left(\frac{i-z}{i+z}\right).$$