יום ד ח אלול התשס"ד, 25-8-2004 .

מבחן סופי בקורס מרוכבות. מועד ב. מורה : גיורא דולה.

משך המבחן שעתים וחצי. המבחן הוא עם כל חומר עזר.

רשום את התשובות במחברת.

המבחן כולל 8 שאלות שוות ערך. ענה/י כמה שתוכל. בהצלחה.

שאלה 1

חשב את $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^{12}+730x^{6}+729}$

תשובה תוך שמוש ברקובות: המכנה שוה ל-
$(x^6+1)(x^6+729)= (x^3-i)(x^3+i)(x^3-27i)(x^3+27i)=(x-cis(30))(x-cis(150))(x-cis(270))(x-cis(90))(x-cis(210))(x-cis(330))$ $(x-3cis(30))(x-3cis(150))(x-3cis(270))(x-3cis(90))(x-3cis(210))(x-3cis(330))$.. . .. .
נתיחס לתחום במישור הכלוא על ידי הציר הממשי מ-R- עד R ומשם בחצי מעגל.
עבור R גדול מספיק לאינטגרנד יש ששה קטבים פשוטים בתחום הכלוא,
$x=rcisa$ כאשר $r=1,3$ $a=30,90,150$ לכן לפי משפט השארית האינטגרל שוה ל-$2\pi i$ כפול סכום השאריות של האינטגרנד בקטבים אלו.
אז:

$$es(z=cis(30)) = \lim_{z\to cis(30)} \frac{z-cis(30)}{(z^3-i)(z^3+i)(z^6+729)} =$$

$$= \lim_{z\to cis(30)} \frac{z-cis(30))}{(z^3-i)(i+i)(-1+729)} = \lim_{z\to cis(30)} \frac{z-cis(30))}{(z^3-i)2i\square 728}$$

זאת כיון ששרש זה מקים כי $z^6+1=0, z^3-i=0$. לכן נותר לחשב את השארית של נקודה זו ביחס לפונקציה $1/(z^3-i)$. עבור נקודה זו ופונקציה זו נחשב לפי כלל ל-הופיטל ונקבל:

$$res(z=cis(30))=\lim_{z\to cis(30)}\frac{z-cis(30)}{(z^3-i)}=$$

$$=\lim_{z\to cis(30)}\frac{1}{3z^2}=\frac{1}{3cis60}$$

ובסך הכל נקבל:

$$res(z=cis(30))=\frac{1}{4368icis(60)}=\frac{-icis(300)}{4368}$$

בצורה דומה נקבל כי:

$$res(z=cis(150))=\frac{1}{4368icis(300)}=\frac{-icis(60)}{4368}$$

וכנ"ל:

$$res(z=cis(270))=\frac{1}{4368icis(180)}=\frac{-icis(180)}{4368}$$

ולכן נקבל:

$$res(z=cis(30))+res(z=cis(150))=-res(z=cis(270))=$$

$$\frac{icis(180)}{4368}=\frac{-i}{4368}$$

בצורה דומה נקבל:

$$res(z=cis(90))=\lim_{z\to cis(90)}\frac{z-cis(90)}{(z^3-i)(z^3+i)(z^6+729)}=$$

$$=\lim_{z\to cis(90)}\frac{z-cis(90))}{(z^3+i)(-i-i)(-1+729)}$$

$$=\frac{1}{3(cis(90))^2(-2i)728}=\frac{-i}{4368}$$

כעת נותר לחשב את השאריות עבור הנקודות עם r=3 . נקבל:

$$res(z=3cis(30))=\lim_{z\to 3cis(30)}\frac{z-3cis(30)}{(z^3-27i)(z^3+27i)(z^6+1)}=$$

$$=\lim_{z\to 3cis(30)}\frac{z-3cis(30))}{(z^3-27i)(27i+27i)(-729+1)}=$$

$$\frac{-1}{39312i}\lim_{z\to 3cis(30)}\frac{z-3cis(30))}{(z^3-27i)}=\frac{-1}{39312i}\frac{1}{3(cis(30))^2}=$$

$$\frac{-cis(-60)}{117936i}=\frac{icis(-60)}{117936}$$

ובצורה דומה:

$$res(z=3cis(150))=\frac{-1}{39312i}\frac{1}{3(cis(150))^2}=$$

$$\frac{-cis(60)}{117936i}=\frac{icis(60)}{117936}$$

ולכן סכום שני אלו הוא:

$$\frac{icis(60)}{117936}+\frac{icis(-60)}{117936}=\frac{-icis(180)}{117936}=\frac{i}{117936}$$

ובדומה לכך,

$$(z=3cis(90))=\lim_{z\to 3cis(90)}\frac{z-3cis(90))}{(-27i-27i)(z^3+27i)(-729+1)}=$$

$$\frac{-1}{312i}\lim_{z\to 3cis(90)}\frac{z-3cis(90))}{(z^3-27i)}=\frac{1}{39312i}\frac{1}{3(cis(90))^2}=$$

$$\frac{icis(180)}{117936}=\frac{i}{117936}$$

ולכן סכום השאריות הוא:

$$\frac{i}{117936}+\frac{i}{117936}-\frac{i}{4368}-\frac{i}{4368}=\frac{i}{58968}-\frac{i}{2184}=-\frac{26i}{58968}$$

וסוף סוף:

$$\ldots 729} = \frac{-2\pi i 26 i}{58968} = \frac{\pi}{1134}, \int_0^\infty \frac{dx}{x^{12}+730x^6+729} = \frac{\pi}{2268}$$

שאלה 2

חשב את

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^4(t)dt}{\sin^2(t)+5\cos^2(t)-1}$$

תשובה:

פתרון בדרך מרוכבת: נציב $z=e^{it}$ עבור $0\le t\le 2\pi$. אז מתקיים $|z|=1$ וכמו כן $dz=izdt$. ונקבל:

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{\sin^4(t)dt}{\sin^2(t)+5\cos^2(t)-1}=\int_{|z|=1}\frac{(z^2-1/2iz \cdots}{(z^2-1/2iz)^2+5(z^2 \cdots}$$

$$=\int_{|z|=1}\frac{(z^2-1)^4}{-(z^2-1)^2+5(z^2+1)^2-4z^2}\frac{dz}{4i^4z^2iz}=$$

$$=\frac{-i}{4}\int_{|z|=1}\frac{(z^2-1)^4dz}{z^3(4z^4+8z^2+4)}=\frac{-i}{16}\int_{|z|=1}\frac{(z^2-1)^4dz}{z^3(z^2+1)^2}.$$

לאינטגרנד יש שלשה קטבים, 0 מסדר שלישי ו $\pm i$ מסדר שני : נחשב את השאריות, נסכם, נכפל ב-$2\pi i$ ונקבל את האינטגרל.

כדי לחשב את השארית של האינטגרנד סביב 0 , נפתח את המכנים.

$$\frac{1}{1+z^2}=1-z^2+z^4-z^6-\cdots.$$

ולכן :

$$(\frac{1}{1+z^2})^2 = 1-2z^2+3z^4\cdots.$$

וכמו כן,

$$(1-2z^2+\cdots)(1-4z^2+6z^4+\cdots) = (1-6z^2+\cdots)$$

ולכן השארית סביב 0 היא 6i/16 . נביט סביב i . אז הבטוי הופך ל-

$$\frac{1}{z^3} = \frac{1}{(z-i+i)^3} = \frac{i}{(z-i/i+1)^3}$$

$$= i[1-(z-i/i)+(z-i/i)^2-\cdots]^3$$

$$= i(1-3(z-i/i)+\cdots).$$

באותה צורה:

$$\frac{1}{(z+i)^2} = \frac{1}{(z-i+2i)^2} = -\frac{1}{4(z-i/2i+1)^2} =$$

$$-0.25[1-(z-i/2i)+(z-i/2i)^2-\cdots]^2$$

$$= -0.25(1-2(z-i/2i)+\cdots).$$

ובנוסף:

$$(z-1)^4=(z-i-1+i)^4=(-1+i)^4(1+\frac{z-i}{-1+i})^4=$$

$$=(-1+i)^4(1-4\frac{z-i}{-1+i}+\cdots)$$

$$(z+1)^4=(z-i+1+i)^4=(1+i)^4(1+\frac{z-i}{1+i})^4=$$

$$=(1+i)^4(1-4\frac{z-i}{1+i}+\cdots)$$

ולכן נקבל עבור i :

$$\frac{-i(z^2-1)^4}{16z^3(z^2+1)^2} = \frac{-i[(-{}^{1}\!/\!_{4})(1-2({}^{z-i}\!/\!_{2i})+\cdots)]}{16(z-i)^2}$$

$$[i(1-3({}^{z-i}\!/\!_{i})+\cdots][(-1+i)^4(1-4(({}^{z-i}\!/\!_{-1+i}))+\cdots$$

$$[(1+i)^4(1-4(({}^{z-i}\!/\!_{1+i}))+\cdots]$$

ולכן השארית עבור i מתקבלת מסכום המקדמים של החזקות הראשונות, כלומר:

$$res(z=i)=\frac{-i}{16}[\frac{1}{4i}-3-4(-1+i)^3-4(1+i)^3]$$

בצורה דומה נקבל את השארית הבאה:

$$res(z=-i)=\frac{-i}{16}[-\frac{1}{4i}-3+4(1+i)^3-4(1-i)^3]$$

ולכן נסכם סוף סוף את השאריות:

$$res = \frac{6i}{16} + \frac{-i}{16}[\frac{1}{4i} - 3 - 4(-1+i)^3 - 4(1+i)^3]$$

$$+\frac{-i}{16}[-\frac{1}{4i} - 3 + 4(1+i)^3 - 4(1-i)^3] = \frac{6i}{16} + \frac{6i}{16} = \frac{3i}{4}$$

ואת האינטגרל: $I=(3i/4)(2\pi i)=-3\pi/2$

דרך טריגונומטרית:

$$\frac{\sin^4(t)dt}{{}^2(t)+5\cos^2(t)-1} = \frac{(1-\cos^2(t))^2}{4\cos^2(t)} =$$

$$\frac{1}{\mathrm{os}^2(t)} - \frac{1}{2} + \frac{\cos^2(t)}{4} = \frac{1}{4\cos^2(t)} - \frac{1}{2} + \frac{1+\cos(2t)}{8} =$$

$$\frac{-3}{8} + \frac{\cos(2t)}{8} + \frac{1}{4\cos^2(t)}$$

ולכן:

$$\frac{\sin^4(t)dt}{\sin^2(t)+5\cos^2(t)-1} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-3}{8} + \frac{\cos(2t)}{8} + \frac{1}{4\cos^2(t)}\right)dt =$$

$$\frac{-3t}{8} + \frac{\sin(2t)}{16} + \frac{\tan(t)}{4}\Big]_0^{2\pi} = \frac{-3\pi}{4} + 0 + ?.$$

בהנחה כי האינטגרל של tan על שני מחזורים הוא 0 , קבלנו חצי ממה שצריך.

שאלה 3

פתח את הפונקציה f לטור לורן סביב z=-2.

$$f = \frac{1}{z^3+8}$$

תשובה:

$$= \frac{1}{z+2}\,\frac{1}{z-(1+\sqrt{3}i)}\,\frac{1}{z-(1-\sqrt{3}i)}.$$

$$\cdots\frac{1}{+2-(3-\sqrt{3}i)}=$$

$$\cdots\frac{1}{\cdots z+2\big/_{3-\sqrt{3}i})}\;\frac{1}{1-(z+2\big/_{3+\sqrt{3}i})}=$$

$$\cdots\frac{}{\cdots i)\big/_{12})}\;\frac{1}{1-((z+2)(3-\sqrt{3}i)\big/_{12})}=$$

$$\cdots\big/_{12})+((z+2)(3+\sqrt{3}i)\big/_{12})^{2}+\cdots]$$

$$\cdots+2)(3-\sqrt{3}i)\big/_{12})^{2}+\cdots].$$

נפתח סוגרים ונקבל:

$$\frac{1}{12}\frac{1}{z+2}[1+\frac{z+2}{12}((3+\sqrt{3}i)+(3-\sqrt{3}i))+$$
$$(\frac{z+2}{12})^2[(3+\sqrt{3}i)^2+(3+\sqrt{3}i)(3-\sqrt{3}i)+(3-\sqrt{3}i)^2]+$$
$$(\frac{z+2}{12})^3[(3+\sqrt{3}i)^3+(3+\sqrt{3}i)^2(3-\sqrt{3}i)+(3+\sqrt{3}i)(3-\sqrt{3}i)^2+(3-\sqrt{3}i)^3]$$
$$+\cdots=\frac{1}{12}\frac{1}{z+2}[1+\frac{z+2}{12}6+(\frac{z+2}{12})^2 24+(\frac{z+2}{12})^3 72+\cdots]=$$
$$\frac{1}{12(z+2)}+\frac{1}{24}+\frac{z+2}{72}+\frac{(z+2)^2}{288}+\cdots$$

שאלה 4

חשב את התמונה של המלבן שקדקדיו $\pi, \pi+i, \pi/2, \pi/2+i$ על ידי הפונקציה cosinus.
כתוב את המשוואות של העקומים אשר תוחמים את התמונה.

תשובה: הקטע הממשי $[\pi/2, \pi]$ עובר עלידי הפונקציה cosin לקטע הממשי $[-1,0]$. על הקטע המדומה $[\pi/2, \pi/2+i]$ נקבל
$\cos(\pi/2+it)= \cos(\pi/2)\cos(it)- \sin(\pi/2)\sin(it)=-\sin(it)=\sin(-it)=(e^{i(-it)}-e^{-i(-it)})/2i=-i\sinh(t)$.
על הקטע הזה הסינוס ההיפרבולי עולה, ולכן אם נכפל ב- $-i$, נקבל את הקטע מ-0 עד $-i(e^2-1)/2e$.

על הקטע המדומה $[\pi, \pi+i]$ נקבל בצורה דומה:

$\cos(\pi+it)= \cos(\pi)\cos(it)- \sin(\pi)\sin(it)=-\cos(it)=-(e^{i(-it)}+e^{-i(-it)})/2=-\cosh(t).$

וכך נקבל את הקטע מ-1- עד $-(e^2+1)/2e$.

נותר הקטע $[\pi/2+i, \pi+i]$. עליו נקבל:

$\cos(i+t)= \cos(i)\cos(t)- \sin(i)\sin(t)= -(e^2+1)/2e \cos(t)- i(e^2-1)/2e \sin(t).$

זוהי משואת רבע אליפסה ברביע השלישי שאורך בסיסה הגדול –ציר x הוא $(e^2+1)/e$, ואורך בסיסה הקטן- ציר y הוא $(e^2-1)/e$. מסקנה: התמונה היא רבע אליפסה, משמאל לציר y , ומתחת ציר x. הקוים המגבילים הם: החלק ברביע השלישי של $x^2/((e^2+1)/e)^2+y^2/((e^2+1)/e)^2=1$, וכן חלקים מצירי x,y השליליים.

שאלה 5

מצא את תמונת חצי המישור $0<y$ על ידי הפונקציה arctan , ובטא את משוואות הקוים התוחמים את התחום.

תשובה:

$$0 < y \Rightarrow -2y < 2y \Rightarrow i(2iy) < i(-2iy) \Rightarrow i(z-\bar{z}) < i(\bar{z}-z)$$

$$\Rightarrow -ii + iz - i\bar{z} + z\bar{z} < -ii + i\bar{z} - iz + z\bar{z} \Rightarrow$$

$$\bar{z}(z-i) + i(z-i) < i(\bar{z}-i) + z(\bar{z}-i) \Rightarrow$$

$$(\bar{z}+i)(z-i) < (z+i)(\bar{z}-i) \Rightarrow$$

$$(i-z)(-i-\bar{z}) < (z+i)(\bar{z}-i) \Rightarrow$$

$$\frac{(i-z)\overline{(i-z)}}{(z+i)\overline{\overline{(z+i)}}} < 1 \Rightarrow \left|\frac{(i-z)}{(z+i)}\right| < 1 \Rightarrow$$

$$\ln\left(\frac{(i-z)}{(z+i)}\right) = x + iy, x < 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2i}\ln\left(\frac{(i-z)}{(z+i)}\right) = a + ib, b > 0$$

הפונקציה מקבלת את חצי המישור העליון.

שאלה 6

בטא את המשואה $(50+32)x^2+36xy+(50+32)y^2-636x-636y-1600=0$ בצורה מרוכבת:

תשובה

$(50+32)x^2+36xy+(50+32)y^2-636x-636y+882=0$ ולכן
$50x^2+50y^2+32x^2+32y^2+(100-64)xy+-636x-636y+882=0$

$50x^2+100xy+50y^2+32x^2-64xy+32y^2-636x-636y+882=0$
$50(x+y)^2+32(x-y)^2-(700-64)x-(700-64)y+882=0$
$50(x+y)^2-700x-700y+32(x-y)^2+64x+64y+882=0$
$50(x+y-7)^2-2450+32(x-y+1)^2-32+882=0$
$50(x+y-7)^2+32(x-y+1)^2=1600=50\cdot 32$
$(x+y-7)^2/32+(x-y+1)^2/50=1$
$((x+y-7)^2/2)/16+((x-y+1)^2/2)/25=1$
$((x-3+y-4)^2/2)/16+((x-3-(y+4))^2/2)/25=1$
נסמן $p=x-3,q=y-4$, אז, נקבל:
$((p+q)^2/2)/16+(p-q)^2/2)/25=1$
ולכן, אם נסמן $w=(1+i)/\sqrt{2}$, אז $w(p+iq)$ מקימת משואת אליפסה
$|w(p+iq)-3|+|w(p+iq)+3|=5$, או,
$|w((x+iy)-(3+4i))-3|+|w((x+iy)-(3+4i))+3|=5$, או
$|wz-w(3+4i))-3|+|wz-(3+4i)w+3|=5$, כלומר z מסובב ע"י כפל ב-w הוא
על אליפסה שאורך צלעותיה 10,8 ושמוקדיה הם:$w(3+4i))+3$, $w(3+4i))-3$.

שאלה 7
הבט במשואה $z^6-64=0$ וסמן את שרשיה שאינם ממשיים על ידי a,b,c,d .
חשב את $a+b+c+d$ את $abc+abd+acd+bcd$, ואת $ab+ac+ad+bc+bd+cd$.

תשובה:

הדרך הארוכה: נקבל $z^6=64=64cis(0)$ ולכן השרשים הם
$w1=2cis(0)=2,w2=2cis(60)=a,w3=2cis(120)=b, w4=2cis(180)=-2,w5=2cis(240)=c, w6=2cis(300)=d$.

נשים לב כי $a+c=0,b+d=0$ ולכן, $a+b+c+d=0$.
נשים לב כי:

$abc=8cis(60)=4a,abd=8cis(120)=4b,acd=8cis(240)=4c,bcd=8cis(300)=4d$

ולכן נקבל כי $abc+abd+acd+bcd=4(a+b+c+d)=0$

ולבסוף נשים לב כי:

$ab=4cis(180)=-4, ac=4cis(300)=2d, ad=4cis(0)=4, bc=4cis(0)=4, bd=4cis(60)=2a, cd=4cis(180)=-4,$

ולכן, $ab+ac+ad+bc+bd+cd=4+4-4-4+2a+2d=2(a+d)=4$

הדרך הקצרה: נחלק את הפולינום z^6-64 בפולינום z^2-4 ונקבל z^4+4z^2+16.
אז $a+b+c+d, abc+abc+acd+bcd, ab+ac+ad+bc+bd+cd$ הם המקדמים של החזקות 3,1,2 בהתאמה ולכן שני הראשונים הם 0 , והאחרון הוא 4 .

שאלה 8

מצא את כל הנקודות בהן $e^{\underline{z}}$ יכולה להיות גזירה, כאשר $\underline{z}$ מסמן צמוד מרכב.

תשובה

$f=e^{(x-iy)}=e^x\cos(y)+(-e^x\sin(y))=u+iv \Rightarrow |f|=e^x\sqrt{(\cos^2(y)+\sin^2(y))}>0.$
$u_x=u, v_y=-u, \Rightarrow 2u=0,\ u=0.$
$u_y=v, v_x=v, \Rightarrow 2v=0,\ v=0, \Rightarrow u+iv=f=0.$
כלומר, נקודה בה f גזירה חיבת לקים כי $f=0$, אבל אין נקודות כאלו.