יום ו א סיון התשס"ד, 21-5-2004 .

בחן אמצע בקורס מרוכבות. מורה : גיורא דולה.

משך המבחן שעתים. המבחן הוא עם כל חומר עזר.

רשום את התשובות במחברת.

המבחן כולל 9 סעיפי שאלות שווי ערך. ענה/י כמה שתוכל. בהצלחה.

שאלה 1

נתון כי $z=x+iy=R\text{cis}(a)$ וכי $x=3,a=\pi/3$. מצא את y,R.

תשובה לשאלה 1

מתקבל משלש ישר זוית בעל ניצב והזוית שלידו ידועים. לכן היתר R הוא 6 ולכן y הוא $R\cos 30=(6\sqrt{3})/2=3\sqrt{3}$

שאלה 2

נתון כי $z=x+iy=R\text{cis}(c),z^2=a+ib,x=-1,a=0.25$. מצא את y,b,R .

תשובה לשאלה 2

$z^2=(x^2-y^2)+i2xy,0.25=x^2-y^2=1-y^2,y^2=0.75,y=\pm\sqrt{3}/2,b=2xy=(-2)[\pm\sqrt{3}/2]= \mu\sqrt{3},R==\sqrt{(1+0.75)}= \sqrt{1.75}=\sqrt{7}/2$.

שאלה 3

מצא את כל פתרונות המשואה $z^6+4z^3+8=0$.

תשובה לשאלה 3

$z^6+4z^3+8=(z^3+2)^2+4=[(z^3+2)+2i][(z^3+2)-2i]=0$.

לכן אחד משני הגורמים צריך להתאפס, ונקבל:

$[(z^3+2)+2i]=0, \Rightarrow z^3=-2(1+.i)=2\sqrt{2}cis(225)= \sqrt{8}cis(225), \Rightarrow$
$z=\sqrt{2}cis(75+120k)$
$[(z^3+2)-2i]=0, \Rightarrow z^3=-2(1-.i)=2\sqrt{2}cis(135)= \sqrt{8}cis(135), \Rightarrow$
$z=\sqrt{2}cis(45+120k)$

שאלה 4

נתונה המשואה $z^4+2z^2+4=0$. נסמן את שרשיה על ידי a,b,c,d . כמה יוצא
$abc+abd+acd+bcd$?

תשובה לשאלה 4

פתרון א-הדרך הארוכה: קודם נחשב את השרשים a,b,c,d ואח"כ את הבטוי:

$z^4+2z^2+4=(z^2+1)^2+3=[(z^2+1)+ \sqrt{3}i][(z^2+1)-\sqrt{3}i]=0$.

ולכן:

$[(z^2+1)+\sqrt{3}i]=0, \Rightarrow z^2=(-1-\sqrt{3}i)=2cis(240), \Rightarrow z=\sqrt{2}cis(120+180k),$
$\Rightarrow z=\pm(-1+\sqrt{3}i),$
$[(z^2+1)-\sqrt{3}i]=0, \Rightarrow z^2=(-1+\sqrt{3}i)=2cis(120), \Rightarrow z=\sqrt{2}cis(60+180k),$
$\Rightarrow z=\pm(1+\sqrt{3}i),$

וכעת נהנים מהכפל והחבור.

נסמן $a=\sqrt{2}cis(60), b=\sqrt{2}cis(120), c=\sqrt{2}cis(240), d=\sqrt{2}cis(300)$, . אז
בכל אחת מהמכפלות הערך המחלט הוא $2\sqrt{2}$, ויש הבדל רק בין הארגומנטים. אז

$arg(abc)=420=60, arg(abd)=480=120, arg(acd)=600=240, arg(bcd)=660=300$. לכן $abc+acd=0,\ abd+acd=0$ ולכן הסכום המבקש הוא 0 .

פתרון ב- קצר יותר:

$z^4+2z^2+4=(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)=z^4-(a+b+c+d)z^3+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)z^2-(abc+abd+acd+bcd)z+abcd$.

לכן הבטוי הרצוי הוא מינוס המקדם של חזקת z הראשונה בפולינום, ולכן הוא 0 .

שאלה 5

א. מצא שתי פונקציות, אשר הפרשן אינו קבוע, ואשר מקימות את הגרסה הבאה של משוואות CR : $u_x=-v_y, u_y=v_x$.

ב. מצא אינסוף פונקציות כאלו, אשר הפרש כל שתים מהן אינו קבוע.

תשובה לשאלה 5

$f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$.

וצריך למצוא את u ואת v . אם נניח כי u היא קבועה, אז $u_x=u_y=0$ ולכן $v_x=v_y=0$, ולכן גם v קבועה, ונקבל $f=c$.

ברצוננו למצוא פתרון יותר מסבך, אך לא בהרבה. ננסה את u להיות פונקציה של משתנה אחד, פשוטה ביותר, אך איננה קבועה. ננסה $u=x$, ואז $v_y=-u_x=-1$, ולכן ננסה $v=-y$. גם המשואה השניה מתקימת, ולכן $f=x-iy=\underline{z}$ היא פתרון.

ננסה, $u=y$. אז $v_y=-u_x=0$, וכמו כן $v_x=u_y=1$ ולכן $v=y$ מתאימה, ולכן $f=y+ix=.i(x-iy)=i\underline{z}$. כלומר אותה פונקציה כמקודם, כפולה ב-i.

מכאן עולה החשד כי משואות CR המיוחדות הללו קשורות לפונקציות של הצמוד המרוכב. נביט על $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ כאשר f פונקציה גזירה מרוכבת כלשהיא, כלומר u,v מקימות את משואות CR. נביט על $f(\underline{z})=u(x,-y)+iv(x,-y)$. אז: הנגזרות החלקיות של u,v ביחס ל x לא משתנות, ואילו הנגזרות ביחס ל-y נכפלות ב 1-. לכן כל פונקציה כזו מקימת את התרגיל.

שאלה 6

א. העבר לצורה מרוכבת את האליפסה $x^2/25+y^2/16=1$.

ב. מצא הצגה פרמטרית לאליפסה של סעיף א. תן תשובה מהצורה
$x=f(t),y=g(t),0\le t\le 2\pi$.

ג. חשב את $\int z^2dz$ לאורך האליפסה, ללא שמוש במשפט קושי-גורסא.

תשובה לשאלה 6

א.כפי שעשינו בכתה, מתקים $b^2+c^2=a^2$, כאשר c הוא המרחק מהראשית למוקד,
a הוא חצי הציר הגדול ו-b הוא חצי הציר הקטן. לכן $16+c^2=25$, לכן $c=3$.
לכן המשואה היא $|z-3|+|z+3|=10$.

ב. נשים לב כי $x/5,y/4$ מקימות את משואת המעגל, ולכן מתקים
$x/5=\cos(t),y/4=\sin(t)$ או $x=5\cos(t),y=4\sin(t)$.

ג. נמשיך $z=5\cos(t)+i4\sin(t)$ ולכן $dz=[5(-\sin(t))+i4\cos(t)]dt$ ולכן:
$z^2dz=(5\cos(t)+i4\sin(t))^2(5(-\sin(t))+i4\cos(t))dt=[(25\cos^2(t)-16\sin^2(t))+40\cos(t)\sin(t)][i4\cos(t)-5\sin(t)]dt=[100i\cos^3(t)-125\cos^2(t)\sin(t)-64i\sin(t)^2\cos(t)+80\sin^3(t)+160i\cos^2(t)\sin(t)-200\cos(t)\sin^2(t)]dt=[100i\cos^3(t)+(-125+160i)\cos^2(t)\sin(t)-(200+64i)\sin^2(t)\cos(t)+80\sin^3(t)]dt.$

כיון שכל פונקציה היא מחזורית במחזור $[0,2\pi]$ שהוא גם קטע האינטגרציה, הרי שהאינטגרל יוצא 0 , כפי שמחיב משפט קושי-גורסא.

שאלה 7

תוך שמוש במספרים מרוכבים, בטא את $(\sin(x))^5$ על ידי קומבינציה של הפונקציות הטריגונומטריות של $x,2x,3x,4x,5x$.

תשובה לשאלה 7

$(\sin(x))^5=[(e^{ix}-e^{-ix})/2i]^5=[e^{5ix}-5e^{3ix}+10e^{ix}-10e^{-ix}+5e^{-3ix}-e^{-5ix}]/32i=[2\sin(5x)-10\sin(3x)+20\sin(x)]/32.$