יום ו ז איר התשס"ג, 9-5-2003 .

בחן אמצע בקורס מרוכבות. מורה : גיורא דולה.

משך המבחן שעתים וחצי. המבחן הוא עם כל חומר עזר.

רשום את התשובות במחברת.

המבחן כולל 8 שאלות שוות ערך. ענה/י כמה שתוכל.   <u>בהצלחה.</u>

שאלה 1

הוכח בצורה מלאה את הנוסחה: $(rcis(a))(scis(b))=rscis(a+b)$

תשובה לשאלה 1

$z=rcis(a)=x+iy$, $w=scis(b)=u+iv$,
$(rcis(a))(scis(b))=(x+iy)(u+iv)=(xu-yv)+i(xv+yu)=zw$.
$arg(zw)=tan^{-1}((xv+yu)/xu-yv))=tan^{-1}([(xv+yu)/xu]/[(xu-yv)/xu])=$
$tan^{-1}([(v/u+y/x)]/[(1-(y/x)(v/u))])= tan^{-1}([(tan^{-1}(w)+ tan^{-1}(z)]/[(1-(tan^{-1}(w)tan^{-1}(z)])=tan^{-1}(tan[(tan^{-1}(w)+tan^{-1}(z)])=tan^{-1}(w)+tan^{-1}(z))=arg(z)+arg(w)$.
$|zw|^2=(xu-yv)^2+(xv+yu)^2=x^2u^2+y^2v^2-2xyuv+x^2v^2+y^2u^2+2xyuv=$
$x^2u^2+y^2v^2+x^2v^2+y^2u^2=(x^2+y^2)(u^2+v^2)=|z|^2|w|^2$

שאלה 2

הוכח כי כפל מספרים ב-C הוא אסוציאטיבי: $z(wp)=(zw)p$. מותר להסתמך על תכונות R .

תשובה לשאלה 2

$z(wp)=(x+iy)((u+iv)(q+ir))=(x+iy)[(uq-vr)+i(ur+qv)]=(xuq-xvr-yur-yqv)+i(xur+xqv+yuq-yvr)$.
$(zw)p=[(x+iy)(u+iv)](q+ir)=[(xu-yv)+i(xv+yu)](q+ir)=(xuq-yvq-xvr-yur)+i(xur-yvr+xvq+yuq)$.

שאלה 3

חשב את $\left(\frac{1+i}{1+\sqrt{3}i}\right)^{100}$

תשובה לשאלה 3.

$1+i=\sqrt{2}cis(45)$, $1+\sqrt{3}i=2cis(60)$, $(1+i)/(1+\sqrt{3}i)=(\sqrt{2}cis(45))/(2cis(60))=cis(-15)/\sqrt{2}$,$((1+i)/(1+\sqrt{3}i))^{100}=(cis(-15)/\sqrt{2})^{100}=cis(-1500)/2^{50}=cis(-60)/2^{50}=(1-\sqrt{3}i)/2^{50}$

שאלה 4.

מצא את שני שרשי המשואה: $z^2+(1+i)z+(1+\sqrt{3}i)=0$. סמן אותם ב-a,b וחשב את $\frac{ab}{a+b}$.

תשובה לשאלה 4

$ab=1+\sqrt{3}i,a+b=-(1+i),ab/(a+b)=-(1+\sqrt{3}i)/(1+i)=-(1+\sqrt{3}i)(1-i)/2=-[(1+\sqrt{3})+i(-1+\sqrt{3})]/2.$

המשך אחר:

$-(1+\sqrt{3}i)/(1+i)=-(2cis(60))/(\sqrt{2}cis(45))=-\sqrt{2}cis(15).$

שאלה 5

בטא את $(\sin a)^4$ כצרוף לינארי של פונקציות טריגונומטריות של a,2a,3a,…. .
השתמש בהגדרת הסינוס והקוסינוס בלבד.

תשובה לשאלה 5

$\sin(a)=(e^{ia}-e^{-ia})/2i,(\sin(a))^4=((e^{ia}-e^{-ia})/2i)^4=((e^{ia}-e^{-ia}))^4/16=(e^{4ia}-4e^{2ia}+6-4e^{-2ia}+e^{-4ia})/16=(6+(e^{4ia}+e^{-4ia})-4(e^{2ia}+e^{-2ia}))/16=(6+2[\cos(4a)]-8\cos(2a))/16=(3+\cos(4a)-4\cos(2a))/8.$

דרך טריגונומטרית להשואה.

$(\sin(a))^4=((\sin(a))^2)^2=(1-\cos(2a))/2)^2=(1-2\cos(2a)+\cos(2a)^2)/4=(1-2\cos(2a)+(1+\cos(4a))/2)/4=(3-4\cos(2a)+\cos(4a))/8.$

שאלה 6

א. חשב את הבטויים הבאים: $\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$, $\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$.

ב. מתוך א או בכל דרך אחרת חשב את: $\cos(z+\pi/4)$, $\cos(z+\pi/2)$, $\sin(z+\pi/2)$, $\cos(z+\pi)$, $\sin(z+\pi)$.

ג. מתוך ב או בדרך אחרת מצא את תמונת המלבן שקדקדיו $\{0, \pi,.i, \pi+i\}$ על ידי הפונקציה cos.

מותר להשתמש בהגדרת sin ו- cos בלבד.

תשובה לשאלה 6

$\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)=((e^{ia}+e^{-ia})(e^{ib}+e^{-ib})/4)-((e^{ia}-e^{-ia})(e^{ib}-e^{-ib})/(-4))=((e^{i(a+b)}+e^{i(a-b)}+e^{i(b-a)}+e^{-i(a+b)})+(e^{i(a+b)}-e^{i(a-b)}-e^{i(b-a)}+e^{-i(a+b)}))/4=(e^{i(a+b)}+e^{-i(a+b)})/2=\cos(a+b).$

$\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)=((e^{ia}-e^{-ia})(e^{ib}+e^{-ib})/4i)+((e^{ia}+e^{-ia})(e^{ib}-e^{-ib})/4i)=((e^{i(a+b)}+e^{i(a-b)}-e^{i(b-a)}-e^{-i(a+b)})+(e^{i(a+b)}-e^{i(a-b)}+e^{i(b-a)}-e^{-i(a+b)}))/4i=(e^{i(a+b)}-e^{-i(a+b)})/2i=\sin(a+b).$

$\cos(z+\pi/4)=\cos(z)\cos(\pi/4)-\sin(z)\sin(\pi/4)=(1+i)(\cos(z)-\sin(z))/\sqrt{2}.$

$\cos(z+\pi/2)=\cos(z)\cos(\pi/2)-\sin(z)\sin(\pi/2)=-\sin(z).$

$\sin(z+\pi/2)=\cos(z)\sin(\pi/2)+\sin(z)\cos(\pi/2)=\cos(z).$

$\cos(z+\pi)=\cos(z)\cos(\pi)-\sin(z)\sin(\pi)=-\cos(z).$

$\sin(z+\pi)=\sin(z)\cos(\pi)+\cos(z)\sin(\pi)=-\sin(z).$

נביט על הקטע שבין 0 ו-i . נסמן נקודות על הקטע ב-ti . אז:
$\cos(ti)=(e^{iti}+e^{-iti})/2=(e^{-t}+e^{t})/2=(e^{t}+1/(e^{t}))/2.$
הפונקציה $(x+1/x)/2$ עולה בקטע $[1,\infty)$ והפונקציה e^t עולה מהקטע $[0,1]$ ל-$[1,e]$. לכן $\cos(ti)$ ממשית ועולה על הקטע $[0,1]$, ותמונתה היא הקטע $[1,\cos(i)]=[1,(e^2+1)/2e]$.
לפי הזהות $\cos(z+\pi)=-\cos(z)$ יוצא כי $\cos(z)$ יורדת על הקטע $[\pi,\pi+ti]$ ותמונתה הקטע $[-(e^2+1)/2e,-1]$.
מתכונות הפונקציה הממשית $\cos(z)$ כי היא יורדת בין הקטע $[-1,1]$. לכן כאשר נעים על שפת המלבן מ $\pi+i$ ל-π ומשם ל-0 ומשם ל- i , cos נעה על פני הישר הממשי ועולה בקטע $[,-(e^2+1)/2e, ,(e^2+1)/2e]$.
נותר הקטע שבין i ובין $\pi+i$. נביט בזהות הבאה:
$\cos(a+i)=\cos(a)\cos(i)-\sin(a)\sin(i)=\cos(a)(e^{-1}+e)/2-\sin(a)(e^{-1}-e)/2i=\cos(a)(e^2+1)/2-i\sin(a)(e^2-1)/2.$
נקודות אלו מקימות את המשואה:
$x^2+y^2=(\cos(a)(e^2+1)/2)^2+(\sin(a)(e^2-1)/2)^2.$
$(2x/(e^2+1))^2+(2y/(e^2-1))^2=(\cos(a))^2+(\sin(a))^2=1.$
המשואה שהנקודות מקימות היא משואת אליפסה, שצירה הגדול הוא ציר x וארכו $(e^2+1)/2$, וצירה הקטן הוא ציר y וארכו $(e^2-1)/2$. כיון שהנקודות של $\cos(a+i)$ הן עם רכיב y שלילי, הרי שהקו שלהן הוא החצי התחתון של האליפסה. לכן המלבן עובר לחצי אליפסה.

שאלה 7
מצא את נקודות הגזירות האפשריות של הפונקציה $\cos(\underline{z})$, כאשר $\underline{z}$ הוא הצמוד של z.

תשובה לשאלה 7

$\cos(\underline{z})=(e^{i\underline{z}}+e^{-i\underline{z}})/2=(e^{i(x-iy)}+e^{-i(x-iy)})/2=(e^{y+ix)}+e^{-y-ix)})/2=(e^{y}cis(x)+e^{-y}cis(-x))/2=[(e^{y}\cos(x)+e^{-y}cis(-x))+i((e^{y}\sin(x)+e^{-y}\sin(-x))]/2=[(e^{y}\cos(x)+e^{-y}\cos(x))+i((e^{y}\sin(x)-e^{-y}\sin(x))]/2.$
נוכל להשתמש במשואות קושי-רימן, ולמצא נקודות בהן הגזירות אפשרית.

$u_x=v_y\rightarrow(e^y(-\sin(x)+e^{-y}(-\sin(x)))=(e^y\sin(x)+e^{-y}\sin(x))\rightarrow(-\sin(x))(e^y+e^{-y})=\sin(x)(e^y+e^{-y})\rightarrow(-\sin(x))=\sin(x)\rightarrow\sin(x)=0.$
$u_y=-v_x\rightarrow(e^y\cos(x)-e^{-y}\cos(x))=-(e^y\cos(x)-e^{-y}\cos(x))\rightarrow(e^y\cos(x)-e^{-y}\cos(x))=0\rightarrow(\cos(x))(e^y-e^{-y})=0.$

קבלנו מערכת של שתי משואות עם שתי נעלמים.

$\sin(x)=0,\ \cos(x)(e^y-e^{-y})=0$

לא יתכן כי $\sin(x)=\cos(x)=0$ ולכן $\sin(x)=e^y-e^{-y}=0$ או $\sin(x)=0,e^y=1$ ונקבל את סדרת הנקודות $(k\pi,0)$.

שאלה 8

נגדיר מסילה חלקה למקוטעין a*b כאשר a הוא הקו הישר התתחיל ב-0 ונגמר ב- 10x+0i , ו-b הוא הקו הישר המתחיל ב- 10x+0i ומסתים ב-z=x+iy . חשב את האינטגרל של $f(z)=z^2$ לאורך a*b בכל דרך שהיא.

תשובה לשאלה 8

כיון ש-f גזירה בכל המישור המרוכב (אנליטית במישור) לפי משפט קושי גורסא ניתן לבחור כל מסלול מ-0+0i ל-x+iy והאינטגרל יצא זהה. נעדיף את המסלול שהוא קטע ישר בין הנקודות, ומשואתו $a(t)=xt+iyt$ כאשר $0\leq t\leq 1$. נקבל:

$I=\int_0^1=\int_0^1(xt+iyt)^2(x+iy)dt=\int_0^1t^2(x+iy)^3dt=z^3\int_0^1t^2dt=z^3/3.$