פתרונות של שאלות מבחינות

1. שאלה זו הופיעה במבחן מועד ג 2012

הגדרות: עבור צומת x בעץ בינארי T נסמן ב- T_x את תת העץ של T ששורשו x.
(תת העץ הזה כולל את x).
נגדיר את תת העץ השמאלי של x כתת העץ של T ששורשו left(x), דהינו $T_{left(x)}$. באופן דומה, נגדיר את תת העץ הימני של x כתת העץ של T ששורשו right(x) דהינו $T_{right(x)}$.

עבור עץ בינארי T, נגדיר עלה עמוק ימני בעץ T,
כעלה הימני ביותר מבין העלים שנמצאים ברמה העמוקה ביותר בעץ T.
לדוגמה, העלה העמוק ימני בעץ T שמתואר בציור בעמוד הבא הוא העלה שהמפתח שלו הוא 10.

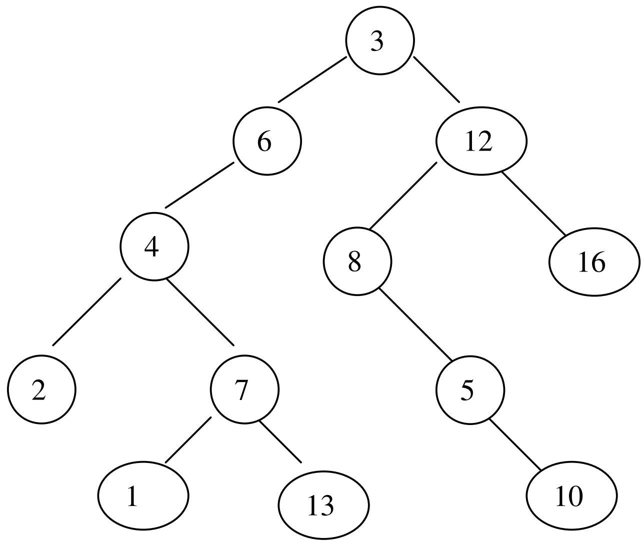
נגדיר את הסכום לעלה עמוק ימני בעץ T, נסמנו ב- sum-deep-leaf(T) כסכום המפתחות של הצמתים שנמצאים במסלול משורש העץ T לעלה העמוק הימני בעץ T.
נסמן ב- sum(T) את סכום המפתחות של כל הצמתים בעץ T.

נגדיר שצומת x שנמצא בעץ בינארי T הוא צומת טוב, אם הסכום לעלה עמוק ימני
בתת העץ הימני של x, גדול מסכום המפתחות של הצמתים בתת העץ השמאלי של x.
במילים אחרות איבר x הוא טוב אם מתקיים :
$$\text{sum-deep-leaf}(T_{right(x)}) > \text{sum}(T_{left(x)})$$

כתוב/כתבי פסאודו-קוד לפונקציה בשם P1, יעילה ככל האפשר, אשר מקבלת כפרמטר עץ בינארי T ומדפיסה (לפי סדר כלשהו) את מפתחות כל האיברים הטובים בעץ T.
נתח/י את סיבוכיות זמן הריצה של הפונקציה שכתבת כתלות במס׳ האיברים בעץ (n).

הנחות ודרישות:
- אין להשתמש במבני עזר נוספים.
- מותר להשתמש במשתנים (כמו למשל x,y,z). מס׳ המשתנים האלו הוא קבוע שאינו תלוי ב- n.

<u>דוגמה:</u>
יהי T עץ בינארי כפי שמתואר בציור הבא:



לאחר הקריאה לתוכנית P1(T) עבור העץ T שבציור יתקבל הפלט הבא:
3,4, 8,5,7

לדוגמה, הצומת 3 שמופיע בפלט הוא צומת <u>טוב</u> כי הסכום לעלה עמוק ימני בתת העץ הימני שלו שווה ל- 12+8+5+10=35 והוא גדול יותר מסכום המפתחות של הצמתים בתת העץ השמאלי שלו ששווה ל- 6+4+2+7+1+13=33.

P1(T)

```
x=root(T)
if (x == NULL) {
     y.sum=0
     y.sum-deep-leaf=0
     y.h=0
     return y
    }
y1=P1(T_left(x))
y2=P1(T_right(x))
y.sum=y1.sum+y2.sum+key(x)
y.h=max{y1.h,y2.h}+1
if (y1.h > y2.h) {
   y.sum-deep-leaf=y1.sum-deep-leaf+key(x)
    }
else
   y.sum-deep-leaf=y2.sum-deep-leaf+key(x)
    }
if (y2.sum-deep-leaf > y1.sum) {
   print key(x)
    }
return y
```

להלן ניתוח הסיבוכיות שהוא בדיוק כפי שמוצג באתר הקורס (בתוספת לחוברת שנקראת More examples on trees).

נסמן ב- $T(n)$ את זמן הריצה של התוכנית כתלות במספר הצמתים בעץ n.

$T(n) \le C_1 + C_2 \cdot$ מספר הקריאות הרקורסיביות $\le$
$C_1 + C_2 \cdot 2n = \theta(n)$

ולכן $T(n)=O(n)$

מצד שני,

$T(n) \ge$ מספר הקריאות הרקורסיביות $\ge n = \theta(n)$

ולכן $T(n)=\Omega(n)$

ולסיכום $T(n)=\theta(n)$

2. שאלה זו מבוססת על שאלה שהופיעה במבחן מועד ב 2012

במערכת המחשוב של משרד החינוך שומרים נתונים על מורים, בתי ספר ומקצועות הלימוד. עבור כל מורה שומרים: מספר תעודת זהות ופרטים על המקצועות אותם הוא מלמד ועל בתי הספר בהם הוא מלמד.
עבור כל בית ספר שומרים: שם בית הספר (בהנחה ששם זה מזהה את בית הספר באופן יחיד)
ופרטים על המורים שמלמדים בבית הספר והמקצועות הנלמדים בבית הספר.
עבור כל מקצוע שומרים: מספר מקצוע ופרטים על המורים שמלמדים מקצוע זה ועל בתי
הספר בהם נלמד מקצוע זה.

<u>הערה</u>: האופן בו נשמרים הנתונים הנ״ל אינו מפורט, ויהיה עליך לציין אותו כחלק מפתרון השאלה.

הצע/הציעי מבנה נתונים עבור המערכת הנ״ל ששומר את הנתונים הנ״ל ותומך בפעולות הבאות:

- בהינתן מספר תעודת זהות של מורה, מספר מקצוע ושם בית ספר הוספת/מחיקת הנתון שהמורה מלמד את המקצוע בבית הספר בזמן $O(m \cdot logr+logp)$ בממוצע, כאשר m מציין את מספר בתי הספר בהם המורה מלמד את המקצוע, p מציין את מספר המקצועות שהמורה מלמד, ו- r מציין את מספר המורים שמלמדים את המקצוע.
- בהינתן מספר תעודת זהות של מורה, הדפסת רשימת כל המקצועות אותם מלמד המורה כאשר עבור כל מקצוע בנוסף למספר המקצוע מודפס מספר שמציין את מספר בתי הספר שבהם מלמד המורה את המקצוע. על רשימת המקצועות להיות ממוינת לפי מספר בתי הספר בהם מלמד המורה את המקצוע בסדר עולה. על פעולה זו להתבצע בזמן $O(p)$ בממוצע כאשר p מציין את מספר המקצועות אותם מלמד המורה. לדוגמה אם המורה מלמד מקצוע A ב- 3 בתי ספר, מקצוע B ב- 5 בתי ספר ומקצוע C ב- 2 בתי ספר, אזי הפלט יהיה (לפי הסדר משמאל לימין): C 2,A 3,B 5
- בהינתן מספר מקצוע ומספר בית ספר, הדפסת כל המורים שמלמדים מקצוע זה בבית ספר זה, כאשר המורים ממוינים לפי מספר בתי הספר בהם הם מלמדים מקצוע זה בסדר עולה. על פעולה זו להתבצע בזמן $O(q)$ בממוצע כאשר q מציין את מספר המורים שיודפסו. לדוגמה, נניח שמורה X מלמד את המקצוע הנתון בבית הספר הנתון ובעוד 3 בתי ספר, ומורה Y מלמד את המקצוע הנתון בבית הספר הנתון ובעוד 6 בתי ספר, ומורה Z מלמד את המקצוע הנתון בבית הספר הנתון ובעוד 2 בתי ספר, אזי הפלט יהיה (לפי הסדר משמאל לימין): Z,X,Y .

תאר/י באופן מילולי איך מתבצעות <u>כל</u> הפעולות הנ״ל.

<u>המבנה המוצע</u>: טבלת Hash של מורים, מפתח: מס׳ תעודת זהות של מורה. כל איבר בטבלה מכיל מצביע לעץ 2-3 ראשון של מקצועות שאותם מלמד המורה ומצביע לעץ 2-3 שני של מספרים. כל איבר בעץ 2-3 הראשון מיצג מקצוע והמספר המתאים לו בעץ 2-3 השני שווה למספר בתי הספר שבהם המורה מלמד את המקצוע. לכל איבר בעץ 2-3 הראשון יש מצביע למספר המתאים לו בעץ השני ולהיפך. בין העלים בעץ 2-3 השני ישנה רשימה מקושרת. מהאיבר ב- Hash יש מצביע לעלה השמאלי ביותר בעץ השני.

טבלת Hash מקצוע-בית ספר, מפתח: צרוף של מספר מקצוע ושם בית ספר. כל איבר בטבלה מכיל מצביע לעץ 2-3 ראשון של מיצגים של מורים, ומצביע לעץ 2-3 שני של מספרים. כל איבר בעץ 2-3 הראשון מיצג מורה שמלמד את המקצוע בבית הספר והמספר המתאים לו בעץ 2-3 השני שווה למספר בתי הספר שבהם המורה מלמד את המקצוע. לכל איבר בעץ 2-3 הראשון יש מצביע למספר המתאים לו בעץ השני ולהיפך. בין העלים בעץ 2-3 השני ישנה רשימה מקושרת. מהאיבר ב- Hash יש מצביע לעלה השמאלי ביותר בעץ השני.

טבלת Hash מורה-מקצוע, מפתח: צרוף של מספר תעודת זהות של מורה ומספר מקצוע. כל איבר בטבלה מכיל מצביע לרשימה מקושרת לא ממוינת של בתי ספר שמכילה את כל בתי הספר שבהם מלמד המורה את המקצוע.

התרשים הבא מתאר את מבנה הנתונים המוצע בהנחה שבמבנה הנתונים ישנם 3 בתי ספר א-ג, 4 מורים W-Z וחמישה מקצועות A-E והנתונים על המקצועות אותם מלמדים המורים הם כפי שמתואר להלן:

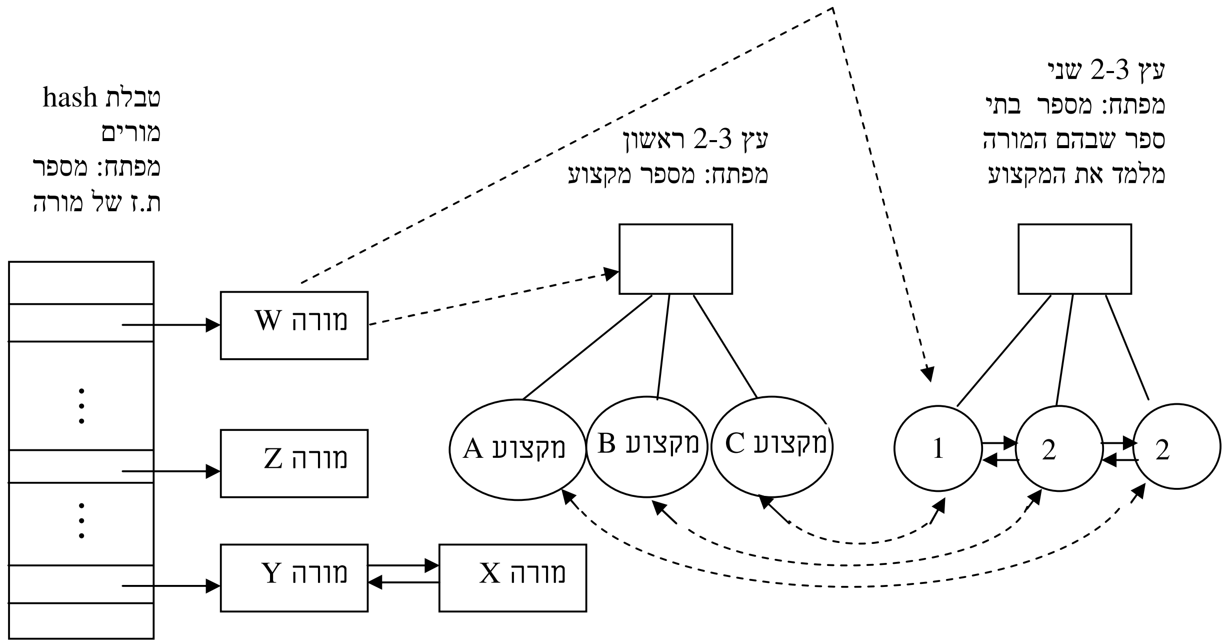
מורה W מלמד מקצועות A,C,E בבית ספר א ומקצועות A,E בבית ספר ב

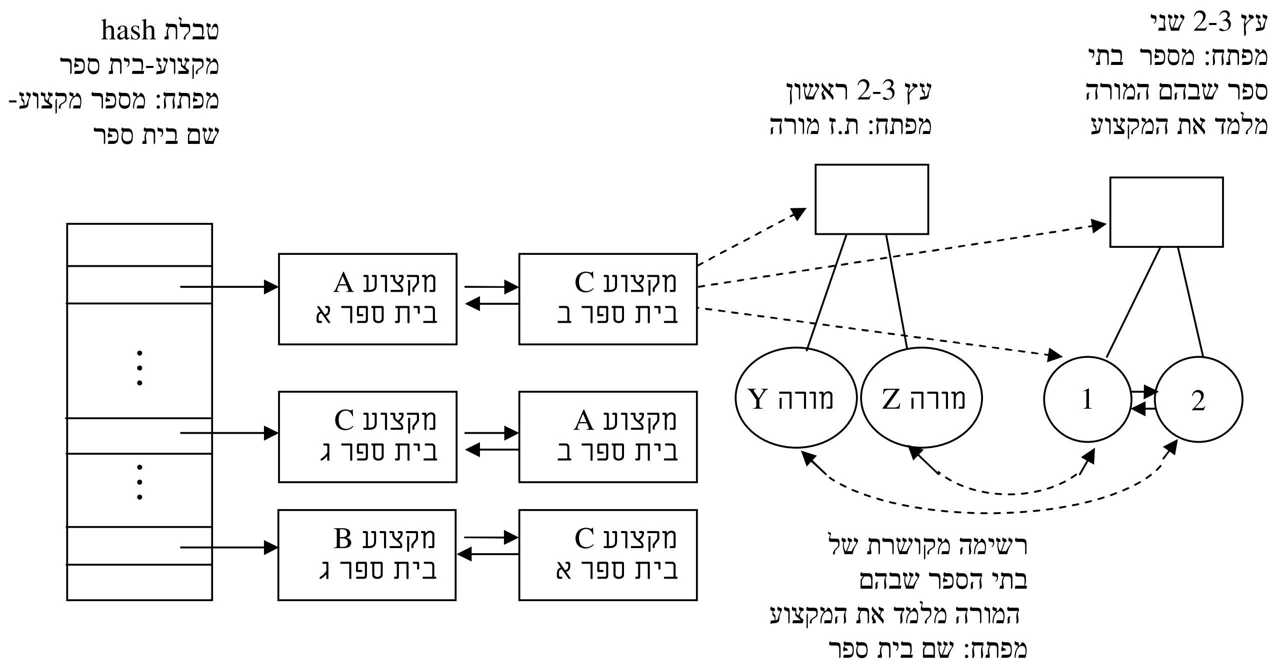
מורה X מלמד מקצועות A,D בבית ספר א ומקצועות B,D,E בבית ספר ג

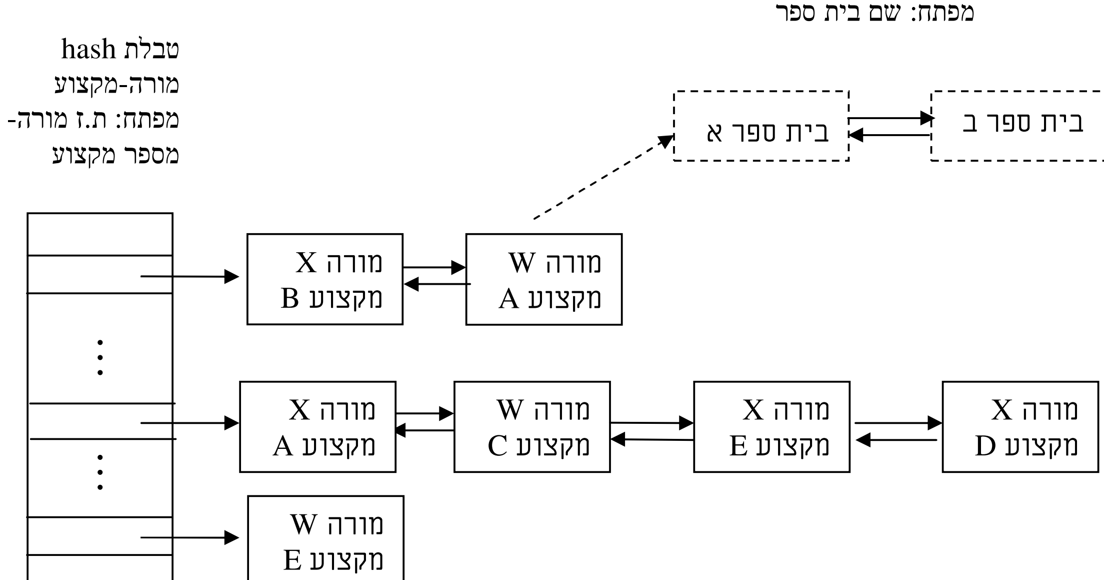
מורה Y מלמד מקצועות B,C,D בבית ספר ג ומקצועות A,C,E בבית ספר ב

מורה Z מלמד מקצועות D,E, בבית ספר א, מקצועות C,D בבית ספר ב ומקצוע D בבית ספר ג

על מנת לפשט את התרשים בטבלת המורים הוצגו רק העצים (ראשון ושני) שמורה W מצביע עליהם. בטבלה של מקצוע-בית ספר הוצגו רק הצרופים של המקצועות A-C ובתי הספר שבהם מלמדים מקצועות אלו. בטבלה זו הוצגו רק העצים (ראשון ושני) שהאיבר שמתאים למקצוע C ובית ספר ב מצביע עליהם. בטבלה של מורה-מקצוע הוצגו רק הצרופים של המורים X,W והמקצועות אותם מלמדים מורים אלו. בטבלה זו הוצגה רק הרשימה המקושרת שמצביע עליה האיבר שמתאים למורה W ומקצוע A.


טבלת hash
מורים
מפתח: מספר
ת.ז של מורה
עץ 2-3 ראשון
מפתח: מספר מקצוע
עץ 2-3 שני
מפתח: מספר בתי
ספר שבהם המורה
מלמד את המקצוע
מורה W
מורה Z
מורה Y
מורה X
מקצוע A
מקצוע B
מקצוע C
1
2
2


טבלת hash
מקצוע-בית ספר
מפתח: מספר מקצוע-
שם בית ספר
עץ 2-3 ראשון
מפתח: ת.ז מורה
עץ 2-3 שני
מפתח: מספר בתי
ספר שבהם המורה
מלמד את המקצוע
מקצוע A
בית ספר א
מקצוע C
בית ספר ב
מקצוע C
בית ספר ג
מקצוע A
בית ספר ב
מקצוע B
בית ספר ג
מקצוע C
בית ספר א
מורה Y
מורה Z
1
2
רשימה מקושרת של
בתי הספר שבהם
המורה מלמד את המקצוע
מפתח: שם בית ספר


טבלת hash
מורה-מקצוע
מפתח: ת.ז מורה-
מספר מקצוע
בית ספר א
בית ספר ב
מורה X
מקצוע B
מורה W
מקצוע A
מורה X
מקצוע A
מורה W
מקצוע C
מורה X
מקצוע E
מורה X
מקצוע D
מורה W
מקצוע E

בהינתן מספר תעודת זהות של מורה, מספר מקצוע ושם בית ספר פעולת הוספת הנתון שהמורה מלמד את המקצוע בבית הספר מתבצעת באופן הבא: מחפשים את המורה בטבלת המורים ($O(1)$ בממוצע) ממנו מגיעים לעץ 2-3 הראשון ומחפשים את האיבר המתאים למקצוע ($O(\log p)$) ממנו מגיעים לאיבר המתאים לו בעץ 2-3 השני, מוציאים אותו מהעץ 2-3 השני ומוספים במקומו איבר שגדול ממנו ב- 1 ($O(\log p)$).

לאחר מכן מחפשים את האיבר המתאים למורה ולמקצוע בטבלת המורה-מקצוע ($O(1)$ בממוצע). עוברים על כל האיברים ברשימה המקושרת עליה האיבר מצביע, לכל בית ספר שברשימה מחפשים את האיבר המתאים למקצוע-בית ספר בטבלה מקצוע-בית ספר ($O(1)$ בממוצע). ממנו מגיעים לעץ 2-3 הראשון עליו הוא מצביע ומחפשים בו את המורה ($O(\log r)$). מהמורה מגיעים לאיבר המתאים לו בעץ 2-3 השני מוציאים אותו מהעץ ומוסיפים במקומו איבר הגדול ממנו ב- 1 ($O(\log r)$). מאחר והפעולה מתבצעת על m בתי ספר סך הכול זמן הפעולה הוא $O(m\log r)$ בממוצע. לאחר שמסיימים לעבור על כל בתי הספר שברשימה המקושרת כפי שתואר לעיל, מוסיפים לתחילת הרשימה המקושרת את בית הספר ($O(1)$), מחפשים את האיבר המתאים למקצוע-בית ספר בטבלה מקצוע-בית ספר ($O(1)$ בממוצע) ממנו מגיעים לעץ 2-3 הראשון עליו הוא מצביע ומוסיפים לו את המורה. ממנו מגיעים לעץ 2-3 השני ומוסיפים איבר שמכיל את המספר $m+1$ שמתאים למספר בתי הספר שבהם מלמד המורה את המקצוע ($O(\log r)$). מקרי הקצה שבהם לא קיים איבר שמתאים למורה ולמקצוע בטבלת מורה-מקצוע ושלא קיים איבר שמתאים למקצוע ולבית הספר בטבלת מקצוע-בית ספר לא פורטו.
לפיכך, סך הכול סיבוכיות הזמן של הפעולה היא $O(m\log r+\log p)$.

בהינתן מספר תעודת זהות של מורה, מספר מקצוע ושם בית ספר פעולת מחיקת הנתון שהמורה מלמד את המקצוע בבית הספר מתבצעת באופן דומה לפעולת ההוספה בהבדל שבמקום להוסיף 1 לאיבר המתאים בעץ 2-3 השני מחסירים 1, במקום להוסיף מורה לעץ 2-3 הראשון המתאים למקצוע ולבית הספר מוציאים את המורה ובמקום להוסיף בית ספר לרשימה המקושרת המתאימה למקצוע ולמורה מוציאים את בית ספר מהרשימה המקושרת.

בהינתן מספר תעודת זהות של מורה, הדפסת רשימת כל המקצועות אותם מלמד המורה מתבצעת באופן הבא: מחפשים את המורה בטבלת המורים ($O(1)$ בממוצע), ממנו מגיעים לעלה השמאלי ביותר בעץ 2-3 השני. עוברים על העלים בעץ 2-3 השני משמאל לימין ולכל עלה מדפיסים את ערכו ואת המקצוע המתאים לו בעץ הראשון ($O(p)$ בממוצע).

בהינתן מספר מקצוע ומספר בית ספר, הדפסת כל המורים שמלמדים מקצוע זה בבית ספר זה מתבצעת באופן הבא: מחפשים את האיבר המתאים למקצוע ולבית הספר בטבלת מקצוע-בית ספר ($O(1)$ בממוצע). ממנו מגיעים לעלה השמאלי ביותר בעץ 2-3 השני. עוברים על העלים בעץ 2-3 השני משמאל לימין ולכל עלה מדפיסים את המורה שמתאים לו בעץ הראשון ($O(q)$). לכן, סך הכול סיבוכיות הזמן של הפעולה היא $O(q)$ בממוצע.

3. שאלה זו הופיעה במבחן מועד ג 2012

נתח את סיבוכיות זמן הריצה (במונחים של θ) של קטע הקוד הבא כתלות ב- n. נמק את תשובתך.

```
x = 0
for (i=1; i ≤ 4n; i++) {
  for (j=i; j ≤ n; j++) {
      x++
  }
}
z=1
y=0
while (z ≤ 2^(2^x) )
{
     z=z*2
     y++
}
```

בשאלות מהסוג הזה, מאחר ובהמשך יש לולאת while שתלויה ב- x וזמן הריצה שלה הוא 2^x

חשוב להעריך במדויק את הערך של x בחלק הראשון, כי אם x יוצא 2n או 3n התשובה בהמשך תהיה שונה כי

$$\theta(2^{2n}) \neq \theta(2^{3n})$$

נסמן ב- w את מספר הפעמים שנכנסים ללולאת ה- while.
נחשב תחילה את w כתלות ב- x.

נסמן ב- z_k את הערך של המשתנה z לאחר k כניסות ללולאה בסוף הלולאה.
נקבל ש-

$$z_k = 2^k$$

מאחר ו-

$$z_w > 2^{2^x}$$

נקבל:

$$2^w > 2^{2^x}$$

ולכן

$$w > 2^x$$

מצד שני: $z_{w-1} \le 2^x$

$$2^{w-1} \le 2^{2^x}$$

ולכן

$$w-1 \le 2^x$$

$$w \le 2^x + 1$$

ולכן בסך הכול נקבל ש- $w = 2^x + 1$

נחשב את הערך של x שמתקבל מהחלק הראשון של קטע הקוד.

בכל כניסה ללולאה הפנימית הערך של x גדל ב- 1. ולכן הערך של x בסיום קטע הקוד הראשון שווה למספר הכניסות ללולאה הפנימית.

עבור i=1 נכנסים n פעמים ללולאה הפנימית
עבור i=2 נכנסים n-1 פעמים ללולאה הפנימית
עבור i=3 נכנסים n-2 פעמים ללולאה הפנימית
...
עבור i=n נכנסים פעם אחת ללולאה הפנימית
עבור n<i≤4n לא נכנסים ללולאה הפנימית

ולכן הערך של x לאחר ביצוע קטע הקוד הראשון שווה ל-

$$n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = 1 + 2 + 3 + \cdots n = (1/2)\cdot n \cdot (n+1)$$

ולכן:

$$T(n) = C_1 + C_2 \cdot 4n + C_3 \cdot (1/2)\cdot n\cdot(n+1) + C_4 \cdot 2^{(1/2)\cdot n\cdot(n+1)+1} = \theta(2^{(1/2)\cdot n\cdot(n+1)})$$

פעולות מחוץ ללולאות

פעולות בלולאה החיצונית

פעולות בלולאה הפנימית

פעולות בלולאת ה- while

4. שאלה זו מבוססת על שאלה שהופיעה במבחן מועד ב 2012

הוכח שלכל מספר שלם חיובי (וגדול מ- 12) n כך ש- n-1 מתחלק ב- 4 (ללא שארית), קיים עץ בינארי שמקים את התנאים הבאים:

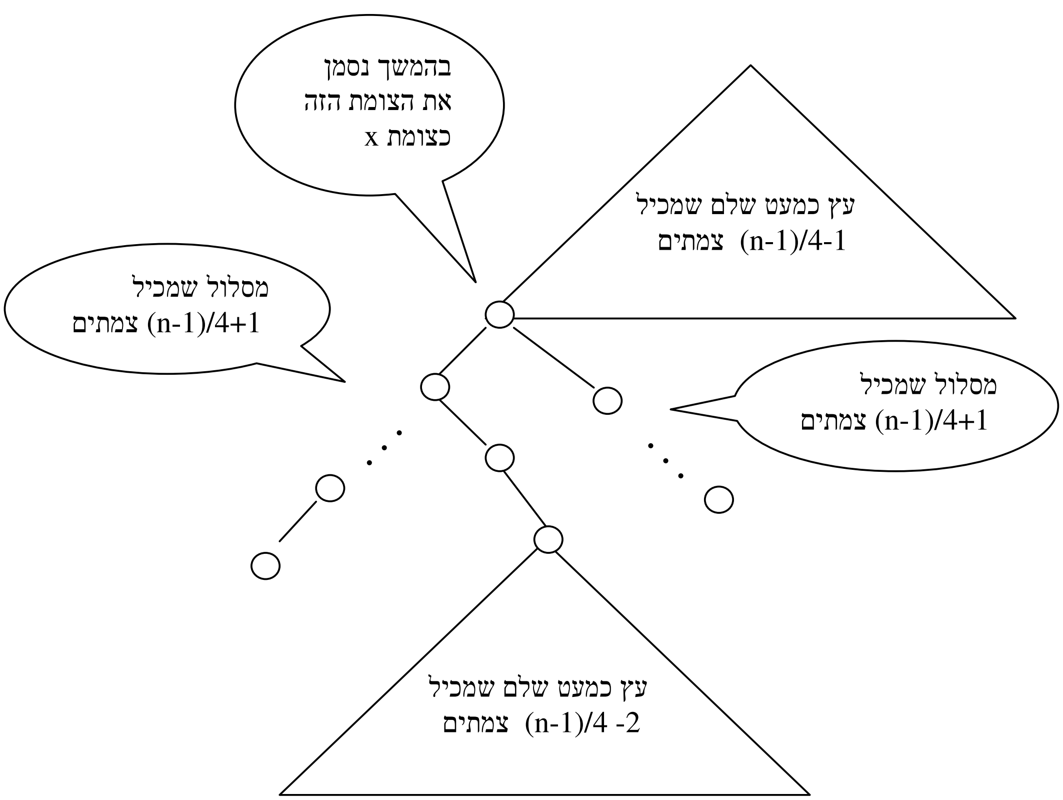
1) מספר הצמתים בעץ הוא בדיוק n.

2) גובה העץ קטן מ- $\frac{n}{2}$

3) מספר העלים בעץ גדול או שווה $\frac{n-1}{8}$

4) קיימים בעץ לפחות $\frac{n-1}{2}$ צמתים שיש להם בן אחד בדיוק והרמה שלהם גדולה מ- $\log_2\left(\frac{n}{4}\right)$

לכל n כך ש- n-1 מתחלק ב- 4 (ללא שארית), נבנה את העץ הבא ונראה שהוא עומד בכל הדרישות:



מספר הצמתים בעץ $= (n-1)/4-1+(n-1)/4+1+(n-1)/4+1+$

מספר הצמתים בעץ הכמעט שלם העליון

מספר הצמתים במסלול שמתחיל בבן הימני של צומת x

מספר הצמתים במסלול שמתחיל בבן השמאלי של צומת x

$$+(n-1)/4-2+1=n$$

מספר הצמתים בעץ הכמעט שלם התחתון ועוד 1 (עבור האבא של שורש העץ)

ולכן הראנו שמספר הצמתים בעץ שבנינו הוא n.

גובה העץ $= (n-1)/4+1+$ גובה העץ הכמעט שלם העליון שהוא עץ כמעט שלם שמכיל (n-1)/4-1 צמתים $\leq$

מספר הצמתים במסלול שמתחיל בבן הימני של צומת x

$$\leq \quad (n-1)/4+1+1+\log_2((n-1)/4-1) < \quad n/2$$

על סמך טענה 6

עבור n≥13

כדי לראות שאי השוויון האחרון נכון עבור $n \geq 13$ נציב $n=13$ ונראה שאי השוויון מתקיים, ומאחר והפונקציה שבצד ימין של אי השוויון עולה יותר מהר מהפונקציה בצד שמאל, נקבל שגם עבור $n>13$ אי השוויון מתקיים.
ולכן הראנו שגובה העץ קטן מ- $n/2$.

מספר העלים בעץ = מספר העלים בעץ הכמעט שלם העליון פחות 1 (כי לצומת x יש בנים) + מספר העלים בעץ הכמעט שלם התחתון + 2

על סמך טענה 8

כי לכל אחד משני המסלולים יש עלה אחד

$$\geq \quad \frac{(n-1)/4-1+1}{4} - 1 + \frac{(n-1)/4-2+1}{4} + 2 =$$

$$= \quad \frac{(n-1)}{16} + \frac{(n-1)-4}{16} + 1 = \frac{n-1}{8} + \frac{12}{16} \geq \frac{n-1}{8}$$

ולכן הראנו שמספר העלים בעץ גדול או שווה ל- $(n-1)/8$.

גובה העץ הכמעט שלם העליון $\geq \quad \log_2(1+(n-1)/4-1) = \log_2((n-1)/4) > \log_2 n/4 - 1$

על סמך טענה 6

ולכן הרמה של כל הצמתים שנמצאים מתחת לעץ הכמעט שלם העליון גדולה מ- $\log_2 n/4$

נחשב את מספר הצמתים שנמצאים מתחת לעץ הכמעט שלם העליון שיש להם בן אחד בדיוק ונראה שהוא גדול או שווה ל - $(n-1)/2$.

כי לאבא של השורש
של העץ הכמעט שלם
התחתון יש בן אחד
בדיוק

מספר הצמתים שנמצאים מתחת לעץ הכמעט שלם העליון שיש להם בן אחד בדיוק

$$\geq \quad (n-1)/4-1 \quad + \quad (n-1)/4 \quad + \quad 1 \quad = \quad (n-1)/2$$

כי לכל אחד מהצמתים
במסלול שמתחיל מהבן
השמאלי של צומת x יש
בן אחד בדיוק פרט לעלה
ולבן השמאלי של צומת
x

כי לכל אחד מהצמתים
במסלול שמתחיל מהבן
הימני של צומת x יש בן
אחד בדיוק פרט לעלה

ולכן הראנו שקיימים בעץ לפחות (n-1)/2 צמתים שיש להם בן אחד בדיוק והרמה שלהם גדולה מ- $\log_2 n/4$

לסיכום, הראנו שהעץ שבנינו מקיים את כל דרישות השאלה.

5. שאלה זו הופיעה במבחן מועד ג 2013

חלק א

שאלה זו מתייחסת להוספה של איברים בעץ AVL לפי האלגוריתמים שנלמדו בכיתה.

האם קיים עץ AVL T שמקים את שני התנאים הבאים:

1) גובה העץ הוא בדיוק 5.
2) לא קיימים שלושה צמתים כך שאם נוסיף אותם לעץ המקורי T אחד אחרי השני גובה העץ יגדל ב- 1.

אם תשובתך היא כן צייר עץ כזה.
אם תשובתך היא לא, נמק מדוע לא קיים עץ כזה.

חלק ב

שאלה זו מתייחסת להוספה של איברים מעץ B לפי החומר ללימוד עצמי שנמצא באתר הקורס.

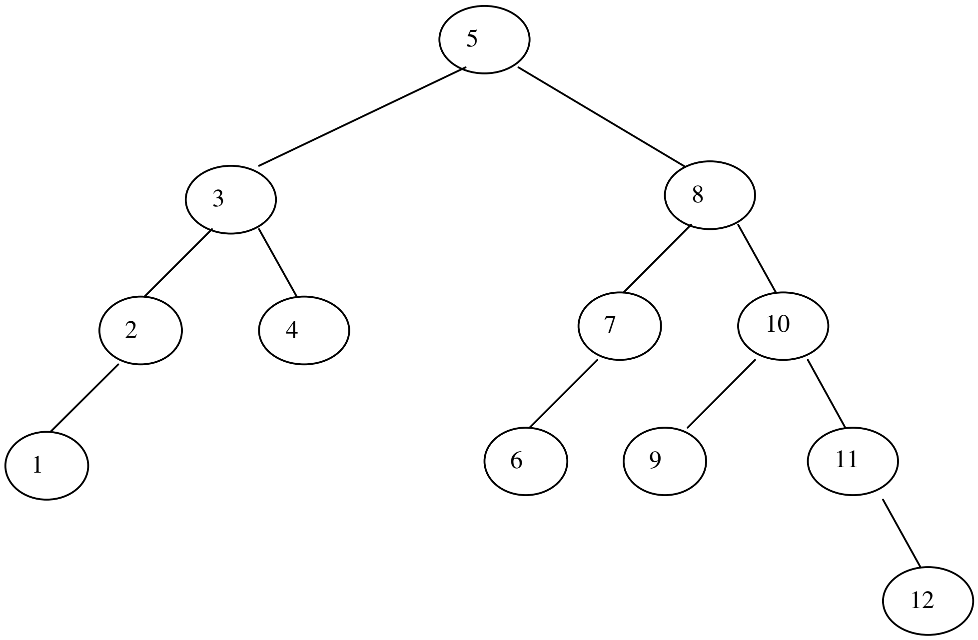
יהי T עץ B (שבו t=3) שמקיים את התנאים הבאים:

1) גובה העץ הוא בדיוק 4.
2) לכל צומת בעץ שאינו עלה יש בדיוק 4 בנים. במילים אחרות, לכל צמתי הדמה בעץ יש בדיוק 4 בנים. (לפיכך, לעץ יש בדיוק 64 עלים).

מהו המספר הקטן ביותר של איברים שיש להוסיף לעץ (אחד אחרי השני) כדי שגובה
העץ יגדל ב- 1. נמק את תשובתך על ידי ציור העץ T וציון הצמתים שצריך להוסיף
לעץ כדי שגובהו יגדל ב- 1.

<u>פתרון חלק א</u>

העץ הבא מקיים את כל התנאים שבשאלה:



כפתרון של השאלה הציור של העץ הנ"ל מספיק. כדי להוכיח שאי אפשר להגדיל גובה את העץ ב- 1 על ידי הוספת 3 צמתים אפשר להשתמש בהוכחה שמתוארת להלן. בהרצאה הראנו:

מספר הצמתים בעץ AVL קטן ביותר בגובה h-2 + מספר הצמתים בעץ AVL קטן ביותר בגובה h-1 + 1 = מספר הצמתים בעץ AVL קטן ביותר בגובה h

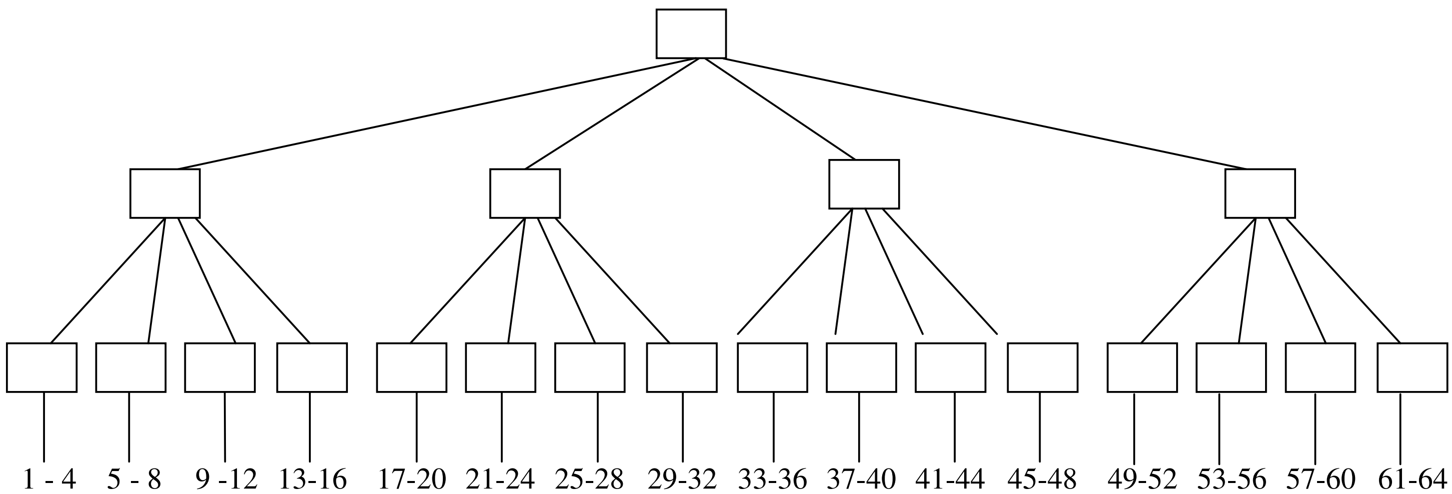
נפעיל את הנוסחה הנ"ל ונקבל:

מספר הצמתים בעץ AVL קטן ביותר בגובה 1 שווה ל- 1
מספר הצמתים בעץ AVL קטן ביותר בגובה 2 שווה ל- 2
מספר הצמתים בעץ AVL קטן ביותר בגובה 3 שווה ל- 4
מספר הצמתים בעץ AVL קטן ביותר בגובה 4 שווה ל- 7
מספר הצמתים בעץ AVL קטן ביותר בגובה 5 שווה ל- 12
מספר הצמתים בעץ AVL קטן ביותר בגובה 6 שווה ל- 20

בעץ שבציור יש 12 צמתים. כדי להגיע ממנו לעץ AVL בגובה 6 צריך להוסיף לו לפחות 8 צמתים (כי העץ הקטן ביותר בגובה 6 מכיל 20 צמתים). לפיכך בהוספת 3 צמתים לעץ שבציור אי אפשר להגיע לעץ AVL בגובה 6.

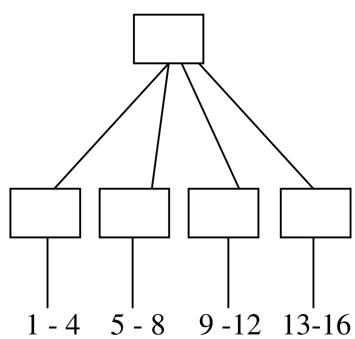
פתרון חלק ב

העץ שתואר בשאלה נראה כך:

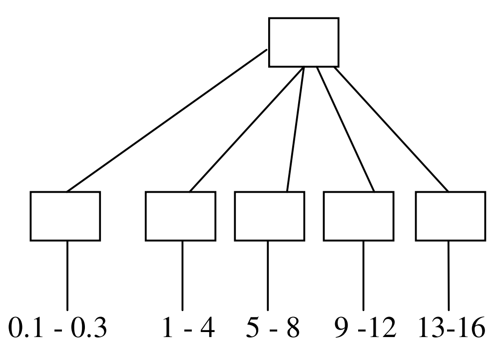


כדי להגדיל את גובה העץ ב- 1 במינימום הוספות נוסיף תמיד לתתי עצים עם מספר גדול ביותר של עלים. כדי שהגובה יגדל ב- 1 צריך להגיע למצב שבו לשורש יש 6 בנים. לצורך כך צריך ליצור פיצול בשני בנים של השורש. נסתכל על תת העץ ששורשו הבן השמאלי של השורש. תת עץ זה נראה כך:

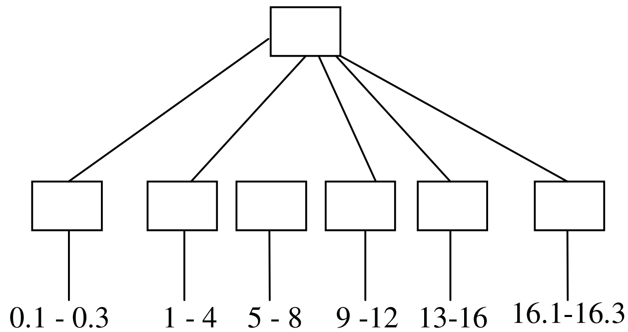
21



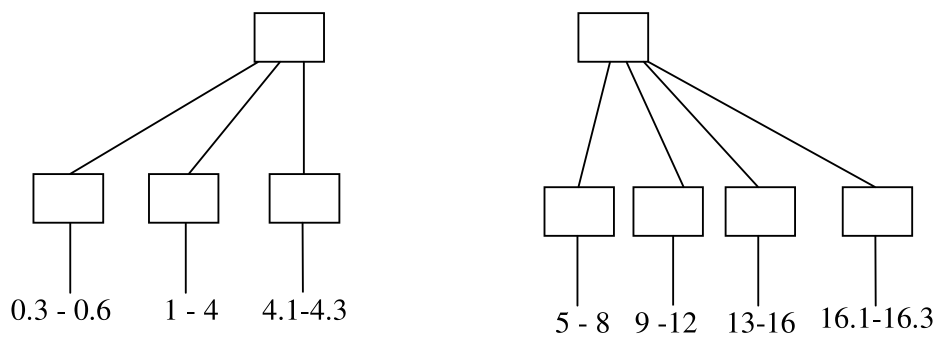
נפצל את הבן השמאלי של השורש של תת העץ הנ"ל על ידי הוספת 3 צמתים: 0.1-0.3 ונקבל את תת העץ הבא:



נפצל את הבן הימני של השורש של תת העץ הנ"ל על ידי הוספת 3 צמתים: 16.1-16.3 ונקבל את תת העץ הבא:



נפצל את הבן השני של השורש של תת העץ הנ"ל על ידי הוספת 3 צמתים: 4.1-4.3 ונקבל את תת העץ הבא:



לסיכום, לאחר הוספת 9 הצמתים 0.1-0.3,16.1-16.3,4.1-4.3 קיבלנו שהבן השמאלי של השורש (בעץ המקורי) התפצל לשני צמתים ולשורש יש עכשיו 5 בנים.
נחזור על התהליך ונוסיף 9 צמתים נוספים לתת העץ ששורשו הבן הימני של השורש. ונקבל שהבן הימני של השורש יתפצל לשני צמתים ולשורש יש עכשיו 6 בנים. כדי שגובה העץ יגדל ב- 1 אנחנו צריכים שעוד בן של השורש יתפצל ל- 2 צמתים. ולכן על ידי הוספת 9 צמתים נוספים לבן משמאל לבן הימני של השורש נקבל שלשורש יהיו 7 בנים ולכן הוא יתפצל וגובה העץ יגדל ב- 1.

לסיכום, המספר המינימאלי של צמתים שצריך להוסיף לעץ המקורי כדי שגובהו יגדל ב- 1 שווה ל- 27.