

18.7.2007

**מבחן מועד א'**  
**מבני נתונים**  
**סמסטר אביב, תשס"ז**

- משך המבחן: שלוש וחצי שעות.
- יש לענות על כל השאלות.
- מותר השימוש בחומר עזר כלשהו פרט למחשבים או מחשבונים.
- יש להקפיד על כתיבה ברורה ומסודרת של התשובות.

בהצלחה !

**1. (25 נקודות)**

נזכיר שגורם האיזון (balance) של צומת  $x$  בעץ בינארי  $T$  מוגדר ע"י הנוסחה:

$$\text{balance}(x) = h(T_{\text{left}(x)}) - h(T_{\text{right}(x)})$$

הגדרה: יהי  $x$  צומת כלשהו בעץ בינארי  $T$  ויהי  $k$  מספר כלשהו. נסמן ב-  $T_x$  את תת-העץ של  $T$  ששורשו  $x$ . נאמר שהצומת  $x$  הוא  $k$ -חיובי בעץ  $T$  אם מספר הצמתים ב-  $T_x$  שגורם האיזון שלהם (בערכו המוחלט) גדול או שווה ל-  $k$  גדול יותר ממספר הצמתים ב-  $T_x$  שגורם האיזון שלהם (בערכו המוחלט) קטן מ-  $k/3$ .

כתוב/כתבי פסאודו-קוד לפונקציה בשם  $P1$ , יעילה ככל האפשר, אשר מקבלת עץ בינארי  $T$  ומספר  $k$  ומדפיסה את כל הצמתים ה-  $k$ -חיוביים בעץ  $T$ .

נתח/י את סיבוכיות זמן הריצה של הפונקציה שכתבת כתלות בגובה העץ ( $h$ ) או במס' האיברים בעץ ( $n$ ) (בחר/י את האפשרות המתאימה מבין  $h$  או  $n$  לפונקציה שכתבת).

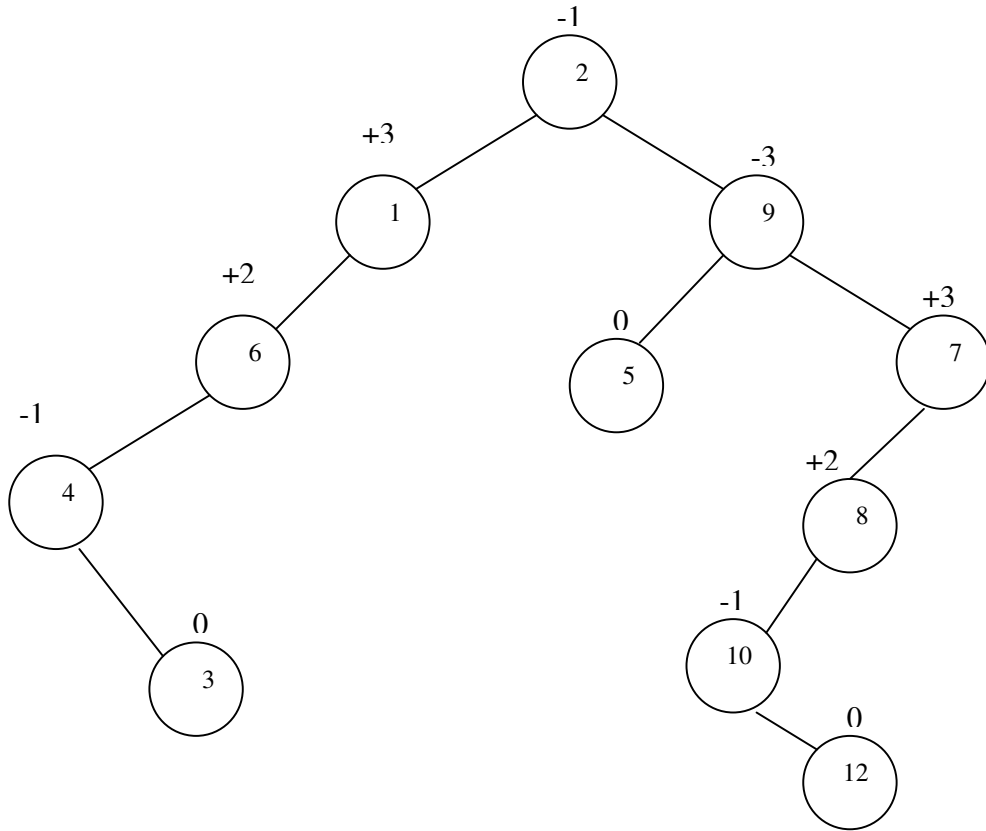
שימו לב שהעץ  $T$  הוא עץ בינארי כללי וגורמי האיזון (או הגבהים) של הצמתים אינם מופיעים כשדות של הצמתים.

**הנחות ודרישות:**

- אין להשתמש במבני עזר נוספים.
- מותר להשתמש במשתנים (כמו למשל  $x, y, z$ ). מס' המשתנים האלו הוא קבוע שאינו תלוי ב-  $n$  או ב-  $h$ .

דוגמה:

נסתכל על העץ הבא (גורמי האיזון רשומים מעל הצמתים).



לאחר הקריאה לתוכנית  $P1(T,1)$  יודפסו הצמתים: 2 1 6 9 7 8

לאחר הקריאה לתוכנית  $P1(T,2)$  יודפסו הצמתים: 2 9 7 1

לאחר הקריאה לתוכנית  $P1(T,3)$  לא יודפס אף צומת.

## 2. (20 נקודות)

נגדיר "תור עדיפויות מיוחד" כתור שבו ישנם שלושה סוגי איברים: מנכ"ל- עדיפות גבוהה ביותר. מנהל - עדיפות בינונית. פועל - עדיפות נמוכה ביותר. בפעולת ההכנסה של איבר לתור מציינים את סוג האיבר שלו.

כאשר מתווסף מנכ"ל הוא קופץ ישר לתחילת התור (דהינו מיקומו בתור הוא לפני כל המנכ"לים המנהלים והפועלים שכבר נמצאים בתור).  
כאשר מתווסף מנהל מיקומו בתור הוא לפני כל המנהלים והפועלים שבתור אבל אחרי כל המנכ"לים שבתור.  
כאשר מתווסף פועל מיקומו בתור הוא בסופו. (דהינו מיקומו בתור הוא אחרי כל המנכ"לים המנהלים והפועלים שכבר נמצאים בתור).

הצע/הציעי מימוש למבנה נתונים זה בעזרת מספר (כלשהו) של מחסניות (ללא מבנה נתונים נוספים) כך שפעולות ההוספה וההוצאה תיקחנה זמן ריצה  $\text{amortized } \theta(1)$ .  
אין צורך לתאר את פעולות ההוספה וההוצאה בעזרת פסיאודו קוד. מספיק לתאר אותן באופן מילולי. יש להוכיח שזמן הריצה  $\text{amortized}$  של הפעולות שהצעת הוא  $\theta(1)$ .

## 3. (15 נקודות)

נתונה נוסחת הנסיגה הבאה:

$$T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{6n}{11}\right) + n$$

איזה מבין האפשרויות הבאות מתקיימת? (יתכן ומתקיימת יותר מאפשרות אחת). הוכח/ הוכיחי את תשובתך.

א.  $T(n) = \theta(\log n)$

ב.  $T(n) = \theta(n)$

ג.  $T(n) = \theta(n^2)$

ד.  $T(n) = \theta(n \log n)$

ה. אף אחת מהתשובות אינה נכונה.

#### 4. (20 נקודות)

נגדיר מבנה נתונים עם צבעים אדום ושחור כמבנה נתונים שלכל איבר בו יש צבע אדום או שחור (אבל לא שניהם).  
נגדיר את העוקב האדום של איבר  $x$  כאיבר בעל המפתח הקטן ביותר מבין האיברים האדומים שהמפתחות שלהם גדולים מהמפתח של  $x$ . באופן דומה נגדיר את העוקב השחור של איבר  $x$ .

הצע/הציעי מבנה נתונים עם צבעים אדום ושחור שתומך בפעולות הבאות (מניחים שמספר האיברים הנוכחי הוא  $n$  ושארן איברים בעלי מפתחות זהים):

- הכנסת איבר חדש בזמן  $O(\log n)$ ,
- חיפוש איבר בזמן  $O(\log n)$ ,
- הוצאת איבר בזמן  $O(\log n)$  (כשמקבלים מצביע לאיבר שרוצים להוציא),
- בהינתן איבר  $x$  אדום חישוב העוקב האדום של  $x$  בזמן  $O(1)$ ,
- בהינתן איבר  $x$  שחור חישוב העוקב השחור של  $x$  בזמן  $O(1)$ ,
- בהינתן איבר  $x$  אדום שינוי הצבע של  $x$  לשחור בזמן  $O(\log n)$ .

תארי/ באופן מילולי איך מתבצעת כל אחת מהפעולות הנ"ל.

#### 5. (20 נקודות)

א. האם קיים עץ **AVL** שכאשר מוסיפים לו שלושה איברים שהמפתח שלהם גדול מהמפתח של כל האיברים בעץ מתבצע גלגול מסוג **RR** עבור כל איבר שמתוסף.

במידה וקיים עץ כזה צייר אותו. במידה ולא נמק מדוע אין עץ כזה.

ב. האם קיים עץ **B** (שבו  $t=2$ ) בעל התכונה הבאה: אם נוציא ממנו **5** איברים (יש בעץ לפחות **5** איברים) גובה העץ יקטן ב- **1** ואם נוסיף לו **5** איברים גובה העץ יגדל ב- **1**.

במידה וקיים עץ כזה צייר אותו. במידה ולא נמק מדוע אין עץ כזה.

**בהצלחה!**