

19.7.2009

מבחן מועד א'
מבני נתונים
סמסטר אביב, תשס"ט

- משך המבחן: שלוש וחצי שעות.
- יש לענות על כל השאלות.
- מותר השימוש בחומר עזר כלשהו פרט למחשבים (מחשבונים מותר).
- יש להקפיד על כתיבה ברורה ומסודרת של התשובות.

בהצלחה !

1. (20 נקודות)

נגדיר עץ בינארי בצבעים. כעץ בינארי (כפי שהוגדר בכיתה) שבו לכל איבר בעץ יש צבע יחיד שהינו אחד משלושת הצבעים אדום שחור או לבן. הצבע של איבר x בעץ נתון על ידי השדה $color(x)$.

יהי T עץ בינארי בצבעים ויהי x איבר בעץ T . נסמן ב- T_x את תת העץ של T ששורשו x . נאמר ש- x הוא איבר "טוב" בעץ T אם סכום המפתחות של איברים בצבע אדום שנמצאים בתת העץ T_x גדול מסכום המפתחות של האיברים בצבע שחור שנמצאים בתת העץ T_x או שמספר האיברים בצבע אדום שנמצאים בתת העץ T_x גדול ממספר האיברים בצבע לבן שנמצאים בתת העץ T_x .

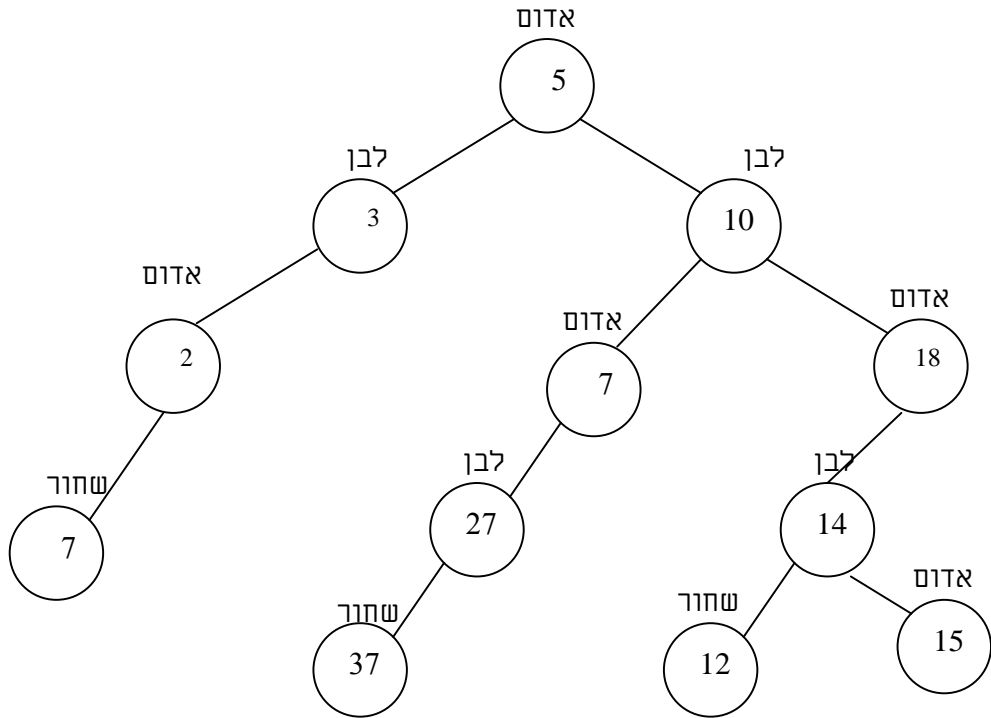
כתוב/כתבי פסאודו-קוד לפונקציה בשם $P1$, **יעילה ככל האפשר**, אשר מקבלת עץ בינארי בצבעים T ומדפיסה (לפי סדר כלשהו) את מפתחות כל האיברים ה"טובים" בעץ T .

נתח/י את סיבוכיות זמן הריצה של הפונקציה שכתבת כתלות בגובה העץ (h) או במס' האיברים בעץ (n) (בחר/י את האפשרות המתאימה מבין h או n לפונקציה שכתבת).

הנחות ודרישות:

- אין להשתמש במבני עזר נוספים.
- מותר להשתמש במשתנים (כמו למשל x, y, z). מס' המשתנים האלו הוא קבוע שאינו תלוי ב- n או ב- h .

דוגמה:
בעץ הבא הצבע של כל צומת מצוין מעל הצומת.



לאחר הקריאה לתוכנית $P1(T)$ עבור העץ T שבציור יתקבל הפלט הבא:
2, 5, 14, 15, 18

2. (20 נקודות)

- לכל מספר טבעי k נגדיר את $\text{bin}(n,k)$ כיצוג המספר k כמספר בינארי באורך n . לדוגמה, $\text{bin}(5,9)$ הנו המספר הבינארי 01001. הצע/הציעי מבנה נתונים שמכיל מספרים טבעיים (ללא חזרות) ותומך בפעולות הבאות, כאשר n מיצג את אורך הייצוג הבינארי של המספרים ו- N מיצג את מספר המספרים שבמבנה:
- בהינתן מספר טבעי k וייצוגו הבינארי באורך n , הוספת המספר למבנה בזמן $O(\max\{\log N, n \log n\})$.
 - בהינתן מספר טבעי k חיפוש המספר במבנה בזמן $O(\log N)$.
 - בהינתן מספר טבעי k חיפוש המספר והוצאתו מהמבנה במידה והוא קיים בזמן $O(\max\{\log N, n\})$.
 - בהינתן אינדקס i מציאת מספר המספרים במבנה הנתונים שהביט ה- i שלהם דלוק בזמן $O(1)$.
 - מציאת סה"כ מספר הביטים הדלוקים בכל המספרים במבנה הנתונים בזמן $O(1)$.
 - בהינתן מספר טבעי k (ללא ייצוגו הבינארי) ואינדקס i מציאת מספר הביטים הדלוקים בעלי אינדקס קטן מ- i בייצוג הבינארי של k בזמן $O(\log(\max\{N, n\}))$.

תארו/י באופן מילולי איך מתבצעת כל אחת מהפעולות הנ"ל.

3. (20 נקודות)

- בחברה להשכרת מכוניות יש n מכוניות כאשר עבור כל מכונית נשמרים במערך המחשוב של החברה פרטי המכונית הכוללים מספר הרישוי, דגם, שנת יצור וכן מחיר השכרת המכונית. הצע/הציעי מבנה נתונים ששומר את נתוני המכוניות הנ"ל ותומך בפעולות הבאות:
- הוספת/הוצאת מכונית בזמן $O(\log n)$ בממוצע.
 - חיפוש מכונית לפי מספר רישוי בזמן $O(1)$ בממוצע.
 - הדפסת כל המכוניות ממוינות לפי מחיר (כאשר המכוניות שמחירן זהה ממוינות לפי מספר הרישוי) בזמן $O(n)$ במקרה הגרוע.
 - הדפסת k המכוניות שמחירן הגבוה ביותר בזמן $O(k \log k)$ במקרה הגרוע.

תארו/י באופן מילולי איך מתבצעות שתי הפעולות האחרונות.

4. (10 נקודות)

נתונה נוסחת הנסיגה הבאה:

$$T(n) = T\left(\frac{n}{9}\right) + 4T\left(\frac{2n}{9}\right) + n$$

איזה מבין האפשרויות הבאות מתקיימת? (ייתכן ומתקיימת יותר מאפשרות אחת). הוכח/ הוכיחי את תשובתך.

א. $T(n) = O(\log^3 n)$

ב. $T(n) = \theta(n)$

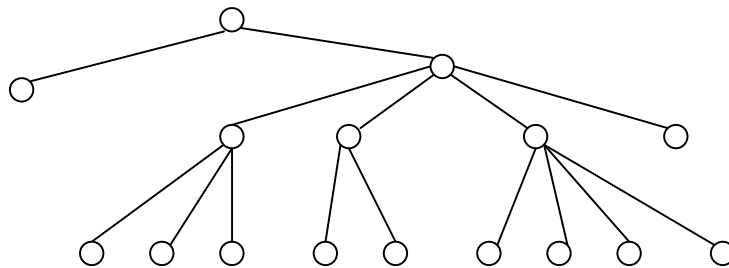
ג. $T(n) = \theta(n^2)$

ד. $T(n) = \theta(n \log n)$

ה. אף אחת מהתשובות אינה נכונה.

5. (10 נקודות)

נגדיר **רמה** של צומת בעץ, כמספר הצמתים במסלול המחבר את הצומת לשורש העץ. נגדיר "עץ מאוזן כללי" כעץ שבו מספר הבנים של כל צומת אינו מוגבל, ולכל i , מספר הצמתים ברמה i בעץ הוא לפחות פי שניים ממספר הצמתים ברמה $i-1$ בעץ. לדוגמה, העץ שבציור הבא הוא עץ מאוזן כללי:



הוכח שלכל עץ מאוזן כללי בעל n צמתים וגובה h מתקיים: $h = O(\log n)$

6. (10 נקודות)

האם קיים עץ AVL בעל התכונות הבאות:

גובה העץ הוא 5 (הגובה נמדד בצמתים, לדוגמה גובה העץ שבציור של שאלה 5 הוא 4). בעץ ישנו איבר שבמהלך הוצאתו מהעץ (לפי האלגוריתם שתואר בכיתה) יתבצע גלגול מסוג RR ולאחר מכן גלגול מסוג LR. אם תשובתך היא כן צייר עץ כזה וציין מיהו האיבר שיש להוציא. אם תשובתך היא לא, נמק מדוע לא קיים עץ כזה.

7. (10 נקודות)

יהי T עץ B (שבו $t=3$) בגובה 4 בעל מספר קטן ביותר של איברים. האם קיימים ארבעה איברים שונים בעץ x, y, z, t כך שמספר צמתי הדמה בעץ שמתקבל לאחר הוצאת האיברים x ו- y מהעץ T שונה ביותר מ-1 ממספר צמתי הדמה בעץ שמתקבל לאחר הוצאת האיברים z ו- t מהעץ T . נמק/י את תשובתך.

בהצלחה!