

מבחן מועד א' סמסטר אביב תש"ע
מבני נתונים

- משך המבחן: שלוש וחצי שעות.
- יש לענות על כל השאלות.
- מותר השימוש בחומר עזר כלשהו פרט למחשבים (מחשבונים מותר).
- יש להקפיד על כתיבה ברורה ומסודרת של התשובות.

בהצלחה !

1. (25 נקודות)

הגדרה: נגדיר **צומת שמאלי ביותר** בעץ בינארי כצומת שמתקבל על ידי מעבר מאב לבנו השמאלי החל משורש העץ ועד שמגיעים לצומת שאין לו בן שמאלי. לדוגמה, הצומת השמאלי ביותר בעץ T1 (שמתואר בצירור בעמוד הבא) הוא הצומת שהמפתח שלו הוא 6.

כתוב/כתבי פסאודו-קוד לפונקציה בשם P1, **יעילה ככל האפשר**, אשר מקבלת כפרמטרים שני עצים בינאריים ומדפיסה את גובה העץ שהינו מקבלים אם הינו מחברים את שורש העץ השני כבן שמאלי לצומת השמאלי ביותר בעץ הראשון.

דרישה חשובה: אסור לשנות את העצים שמתקבלים כפרמטרים לתוכנית, (גם לא באופן זמני), ולכן אסור לתוכנית לחבר פיסית את שני העצים לעץ אחד.

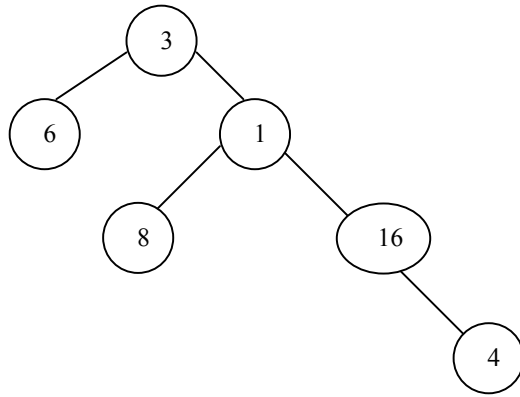
נתח/י את סיבוכיות זמן הריצה של הפונקציה שכתבת כתלות בגבהי העצים (h1,h2) או במס' האיברים בעצים (n1,n2) (בחר/י את האפשרות המתאימה לפונקציה שכתבת).

הנחות ודרישות:

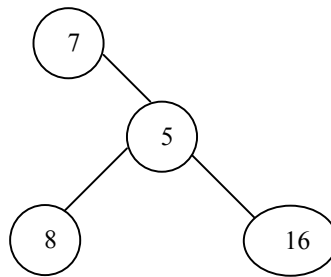
- אין להשתמש במבני עזר נוספים.
- מותר להשתמש במספר קבוע של משתנים (כמו למשל x,y,z).
- מותר להשתמש בפונקציות עזר, אך יש לכתוב את הפסיאודו-קוד של פונקציות העזר.
- כל צומת x בעץ מכיל את השדות הרגילים של עץ בינארי כפי שהוגדר בכיתה. שדות אלה **אינם כוללים** את גובה הצומת x.

דוגמה:

יהי $T1$ העץ הבינארי שמתואר בציור הבא :



יהי $T2$ העץ בינארי שמתואר בציור הבא :



לאחר הקריאה לתוכנית $P1(T1, T2)$ יתקבל הפלט הבא:

5

יהי $T3$ העץ בינארי שמתואר בציור הבא :



לאחר הקריאה לתוכנית $P1(T1, T3)$ יתקבל הפלט הבא:

4

2. (30 נקודות)

- לכל מספר טבעי k נגדיר את $\text{bin}(n,k)$ כייצוג המספר k כמספר בינארי באורך n . לדוגמה, $\text{bin}(5,9)$ הנו המספר הבינארי 01001.
- הצע/הציעי מבנה נתונים שמכיל מספרים טבעיים (עם חזרות) ותומך בפעולות הבאות, כאשר n מיצג את אורך הייצוג הבינארי של המספרים ו- N מיצג את מספר המספרים השונים שבמבנה:
- בהינתן מספר טבעי k וייצוגו הבינארי באורך n , הוספת המספר למבנה (בהנחה שהמספר לא קיים במבנה) בזמן $O(\max\{\log N, n \log n\})$ במקרה הגרוע.
 - בהינתן מספר טבעי k שקיים במבנה הוספת מופע נוסף של המספר בזמן $O(\log N)$ במקרה הגרוע.
 - בהינתן מספר i הוספת מופע אחד לכל המספרים שנמצאים במבנה הנתונים והביט ה- i שלהם דלוק, בזמן $O(1)$.
 - בהינתן מספר טבעי k הדפסת מספר המופעים של המספר במבנה בזמן $O(\max\{\log N, m\})$ כאשר m מציין את מספר הביטים הדלוקים בייצוג הבינארי של המספר k .
 - בהינתן מספר טבעי k שקיים במבנה ומספר i , בדיקה האם i הינו הביט הימני ביותר שדלוק בייצוג הבינארי של k באורך n (דהינו ב- $\text{bin}(n,k)$) בזמן $O(\max\{\log N, \log n\})$.

תארי/ באופן מילולי איך מתבצעות שלושת הפעולות האחרונות .

3. (15 נקודות)

נתונה נוסחת הנסיגה הבאה:

$$T(n) = T\left(\frac{6n}{7}\right) + 3T\left(\frac{n}{21}\right) + n^2$$

איזה מבין האפשרויות הבאות מתקיימת? (יתכן ומתקיימת יותר מאפשרות אחת). הוכח/ הוכיחי את תשובתך.

א. $T(n) = \Omega(n^2 \sqrt{\log n})$

ב. $T(n) = \theta(n)$

ג. $T(n) = \theta(n^2)$

ד. $T(n) = \theta(n \log n)$

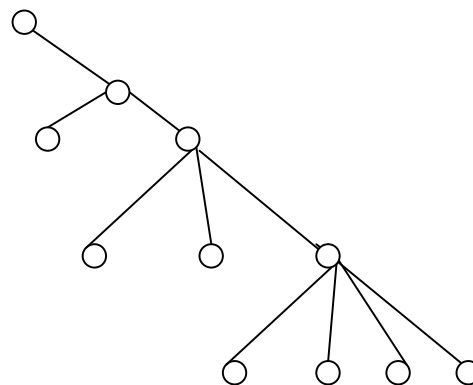
ה. $T(n) = \theta(n^2 \log n)$

ו. אף אחת מהתשובות אינה נכונה.

4. (15 נקודות)

הגדרה: עץ חשבוני ימני הוא עץ שבו לשורש יש בן ימני אחד, לבן הימני של השורש יש שני בנים, וכן הלאה... כך שלצומת הימני ביותר ברמה i בעץ יש בדיוק i בנים (לשאר הצמתים ברמה i בעץ אין בנים כלל).

לדוגמה, עץ חשבוני ימני בגובה 5 נראה כך:



יהי T עץ חשבוני ימני בגובה h בעל n צמתים. הוכח שמתקיים: $n = \theta(h^2)$

5. (15 נקודות)

נגדיר את האיבר ה- i , כאיבר שנמצא במקום i כאשר מסדרים את האיברים במבנה הנתונים בסדר עולה, לפי מפתחותיהם. לדוגמא, האיבר ה-1 הוא הקטן ביותר במבנה הנתונים והאיבר ה- n הוא האיבר הגדול ביותר במבנה הנתונים.

שאלה זו מתייחסת להוצאת איברים מעץ AVL לפי האלגוריתם שנלמד בכיתה.

האם קיים עץ AVL בעל התכונות הבאות (כאשר n מציין את מספר האיברים בעץ):
כאשר נוציא מהעץ את האיבר ה- n לא יקרה גלגול, לאחר מכן כאשר נוציא מהעץ שנשאר את האיבר ה- $n-1$ יקרה גלגול מסוג LR, לאחר מכן כאשר נוציא מהעץ שנשאר את שני האיברים הקטנים ביותר (אחד אחרי השני) לא יקרה גלגול, לאחר מכן כאשר נוציא מהעץ שנשאר את האיבר הקטן ביותר יקרה גלגול מסוג RR.

אם תשובתך היא כן צייר עץ כזה.
אם תשובתך היא לא, נמק מדוע לא קיים עץ כזה.

בהצלחה!