## מבחן מועד א' סמסטר אביב תשע"ב

# מבני נתונים

- משך המבחן: שלוש וחצי שעות.
- יש לענות על כל השאלות.
- מותר השימוש בחומר עזר כלשהו פרט למחשבים (מחשבונים מותר).
- יש להקפיד על כתיבה ברורה ומסודרת של התשובות.

בהצלחה !

### 1. (25 נקודות)

יהי x צומת בעץ בינארי T. נסמן ב- $T_x$ את תת העץ של T ששורשו x (תת העץ $T_x$ כולל את x). נסמן ב- h(T) את **גובה** העץ T שמוגדר כמספר הצמתים במסלול הארוך ביותר מהשורש לעלה כלשהו. נסמן ב- h(x) את גובה הצומת x שמוגדר כגובה של תת העץ $T_x$.

נסמן ב- balance(x) את **גורם האיזון** של הצומת x שמוגדר על ידי הנוסחה:

$$balance(x)=h(T_{left(x)}) - h(T_{right(x)})$$

נאמר ש- x הוא צומת חיובי אם $balance(x)>0$.
נאמר ש- x הוא צומת שלילי אם $balance(x)<0$.

נגדיר "עץ בינארי עם גבהים" כעץ בינארי שבו לכל צומת x (בנוסף לשדות הרגילים בעץ בינארי) יש שדה h(x) שמכיל את הגובה של הצומת x.

נגדיר שצומת x בעץ הוא צומת **<u>"טוב"</u>** אם מתקיימים **<u>שני</u>** התנאים הבאים:

1) במסלול מהאבא של x לשורש העץ ישנו לפחות צומת חיובי אחד.
2) בתת העץ $T_x$ (תת העץ כולל את x) ישנו לפחות צומת שלילי אחד.

לדוגמה, הצומת 32 בעץ שמוצג בציור בעמוד הבא הוא **טוב** כי במסלול מהאבא שלו לשורש נמצא הצומת החיובי 18 ובתת העץ $T_{32}$ נמצא הצומת השלילי 32.

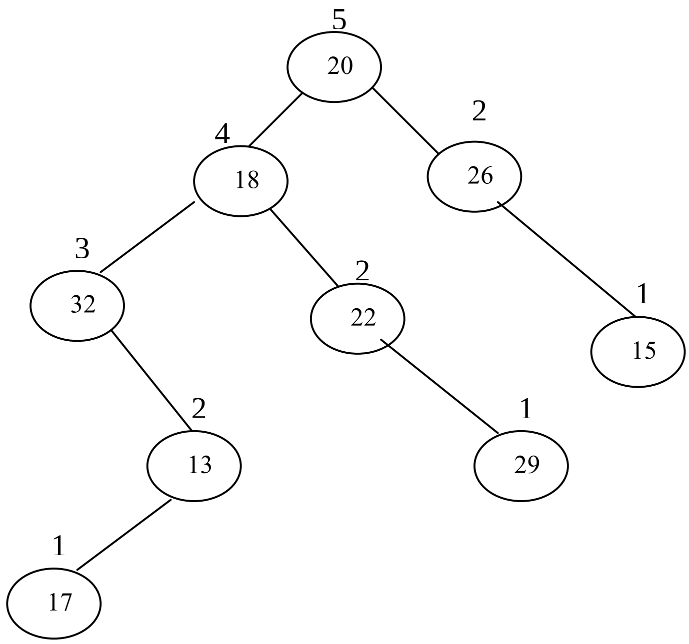
כתוב/כתבי פסאודו-קוד של פונקציה בשם P1, **<u>יעילה ככל האפשר</u>**, אשר מקבלת כפרמטר עץ בינארי עם גבהים T ומדפיסה כל הצמתים הטובים בעץ. (אין חשיבות לסדר הדפסת הצמתים).
נתח/י את סיבוכיות זמן הריצה של הפונקציה שכתבת כתלות במספר האיברים בעץ **n**.

הנחות ודרישות:

- אין להשתמש במבני עזר נוספים.
- מותר להשתמש במספר קבוע של משתנים (כמו למשל x,y,z).
- מותר להשתמש בפונקציות עזר, אך יש לכתוב את הפסיאודו-קוד של פונקציות העזר.
- כל צומת x בעץ מכיל את השדות הרגילים של עץ בינארי כפי שהוגדר בכיתה ובנוסף את השדה h(x) שמכיל את גובה הצומת x. שדות אלה **<u>אינם כוללים</u>** את גורם האיזון של הצומת x.

דוגמה:

יהי T עץ בינארי עם גבהים שמתואר בציור הבא : מעל כל צומת מצוין הגובה שלו.




לאחר הקריאה לפונקציה P1(T) יתקבל הפלט הבא:

22 32 18 26

## **2. (30 נקודות)**
במערכת המחשוב של חברה להשכרת רכבים שומרים נתונים על רכבים, לקוחות והשכרות. עבור כל רכב שומרים: מספר רישוי, דגם הרכב, ומספר ההשכרות של הרכב. עבור כל לקוח שומרים: מספר תעודת זהות, ופרטים על כל הרכבים אותם שכר. (לקוח אחד יכול לשכור רכב מסוים יותר מפעם אחת).

הצע/הציעי מבנה נתונים עבור המערכת הנ"ל ששומר את הנתונים הנ"ל ותומך בפעולות הבאות:

- בהינתן מספר רישוי של רכב ודגם הרכב (כאשר ידוע שהרכב אינו נמצא במערכת) הוספת הרכב למערכת בזמן $O(1)$ במקרה הגרוע. (מספר ההשכרות של רכב זה הוא $0$).
- בהינתן מספר רישוי של רכב הוצאת הרכב מהמערכת ומחיקת כל ההשכרות של רכב זה בזמן $O(k\log n)$ בממוצע כאשר, $k$ מציין את מספר הלקוחות ששכרו רכב זה ו- $n$ מציין את מספר הרכבים שקיימים במערכת בזמן ביצוע הפעולה.
- בהינתן מספר תעודת זהות של שוכר, ומספר רישוי של רכב הנשכר על ידו הוספת/מחיקת הנתון שהשוכר שכר רכב זה בזמן $O(k+\log m)$ בממוצע, כאשר $k$ מציין את מספר הלקוחות ששכרו רכב זה ו- $m$ מציין את מספר הרכבים שהלקוח שכר עד זמן ביצוע הפעולה.
- בהינתן מספר תעודת זהות של לקוח, הדפסת כל דגמי הרכבים אותם שכר הלקוח ממוינים לפי מספר ההשכרות בסדר עולה בזמן $O(p)$ בממוצע כאשר $p$ מציין את מספר הדגמים השונים של רכבים שלקוח זה שכר עד זמן ביצוע הפעולה. לדוגמה אם הלקוח שכר 3 רכבים מדגם A, 5 רכבים מדגם B ו- 2 רכבים מדגם C אזי הפלט יהיה (לפי הסדר משמאל לימין): C,A,B
- בהינתן מספר רישוי של רכב, הדפסת כל הלקוחות ששכרו רכב זה ומספר הפעמים שכל לקוח שכר רכב זה (בסדר כלשהו) בזמן $O(k)$ בממוצע כאשר $k$ מציין את מספר הלקוחות ששכרו רכב זה.

תאר/י באופן מילולי איך מתבצעות **שלושת** הפעולות האחרונות.

**3. (15 נקודות)**

להלן פסיאודו קוד של פונקציה בשם P1(n,m) שמקבלת כפרמטרים שני מספרים n ו- m.
הפונקציה קוראת לפונקצית עזר בשם F(n) שמקבלת כפרמטר מספר אחד n ומתוארת בהמשך.

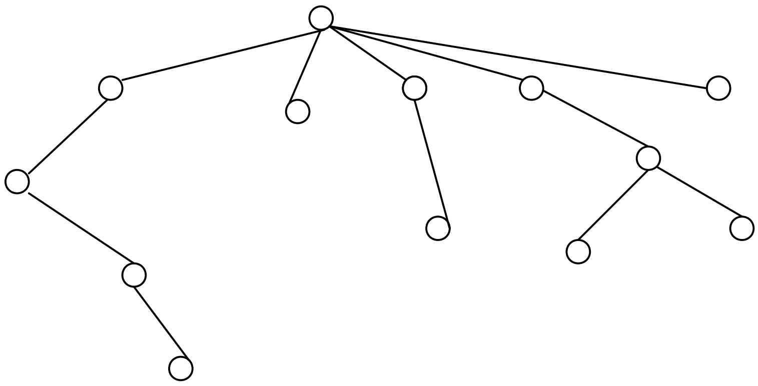
```
P1(n,m)
-----------
x=1
for (i = 1; i ≤ n; i++)
 {
   for (j = 1; j ≤ m; j++)
     {
      x = x + F(i·n) + F(j·m)
     }
 }


F(n)
----
if ( n ≤ 1 )  { return 1 }

else  { return  2·F(n−1)  }
```

נתח/י את סיבוכיות זמן הריצה (במונחים של $\theta$) של הפונקציה P1(n,m) כתלות ב- n ו- m.

## 4. (15 נקודות)

עבור מספר שלם חיובי $m$ נגדיר עץ מסדר $m$ כעץ שבו לשורש יש בדיוק $m$ בנים ולכל שאר הצמתים בעץ יש בין $0$ ל- $2$ בנים.

לדוגמה העץ הבא הוא עץ מסדר $5$.



הוכח שלכל זוג מספרים שלמים חיוביים $m$ ו- $n$ כך ש- $n-1$ מתחלק ב- $m$ (ללא שארית) קיים עץ מסדר $m$ שמספר הצמתים בו הוא בדיוק $n$,

גובהו גדול או שווה ל- $\log_2\left(\frac{n}{m}\right)$

ומספר העלים בו גדול או שווה ל- $\frac{n-1}{4}$

**5. (15 נקודות)**

שאלה זו מתייחסת להוצאת איברים מעץ AVL לפי **האלגוריתם שנלמד בכיתה**.

האם קיים עץ AVL T שמקים את שלושת התנאים הבאים:

1) גובה העץ הוא בדיוק 5 (כאשר גובה עץ מוגדר כמו בשאלה 1).
2) בתהליך ההוצאה של האיבר הגדול ביותר מהעץ T המקורי, יתבצע תחילה גלגול מסוג LL ולאחר מכן יתבצע גלגול מסוג LR.
3) בתהליך ההוצאה של האיבר הקטן ביותר מהעץ T המקורי, יתבצע גלגול אחד בלבד, כאשר סוג הגלגול הוא RR.

אם תשובתך היא כן צייר עץ כזה.
אם תשובתך היא לא, נמק מדוע לא קיים עץ כזה.

## בהצלחה!