

**מבחן מועד א' סמסטר אביב תשע"ג**  
**מבני נתונים**

- משך המבחן: שלוש וחצי שעות.
- יש לענות על כל השאלות.
- מותר השימוש בחומר עזר כלשהו פרט למחשבים (מחשבונים מותר).
- יש להקפיד על כתיבה ברורה ומסודרת של התשובות.

בהצלחה !

**1. (25 נקודות)**

נגזיר רמה של צומת בעץ בינארי  $T$  כמספר הצמתים במסלול המחבר בין הצומת לשורש העץ. לדוגמה הרמה של שורש העץ היא 1, והרמה של הצומת שהמפתח שלה הוא 22 בדוגמה שבציור בעמוד הבא היא 3.

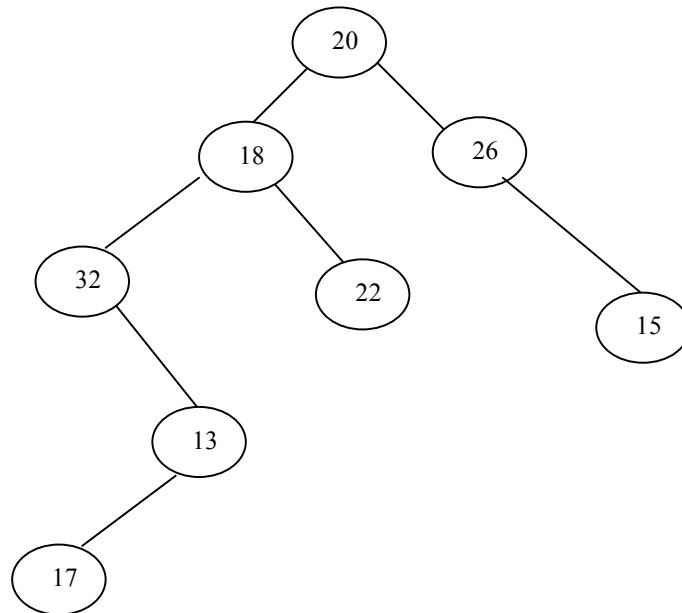
כתוב/כתבי פסאודו-קוד של פונקציה בשם  $P1$ , יעילה ככל האפשר, אשר מקבלת כפרמטר עץ בינארי  $T$  ומדפיסה את סכום הרמות של כל הצמתים בעץ. נתח/י את סיבוכיות זמן הריצה של הפונקציה שכתבת כתלות במספר האיברים בעץ  $n$ .

הנחות ודרישות:

- אין להשתמש במבני עזר נוספים.
- מותר להשתמש במספר קבוע של משתנים (כמו למשל  $x, y, z$ ).
- מותר להשתמש בפונקציות עזר, אך יש לכתוב את הפסאודו-קוד של פונקציות העזר.
- כל צומת  $x$  בעץ מכיל את השדות הרגילים של עץ בינארי כפי שהוגדר בכיתה.

דוגמה:

יהי  $T$  עץ בינארי שמתואר בציור הבא :



לאחר הקריאה לפונקציה  $P1(T)$  יתקבל הפלט: 23.

**הסבר לפלט:** הפלט הנ"ל התקבל מהסכום:  $5 + 4 + 3 + 2 + 3 + 1 + 2 + 3$   
שמתאר את הרמות של הצמתים: 17, 13, 32, 18, 22, 20, 26, 15 בהתאמה.

## 2. (30 נקודות)

במערכת המחשוב של אתר **booking** שמאפשר הזמנת מלונות בארץ ובחו"ל שומרים נתונים על מלונות, לקוחות והזמנות של מלונות שבוצעו באמצעות האתר. עבור כל מלון שומרים: שם המלון (שמשמש לזיהוי המלון), כתובתו ופרטים על כל ההזמנות של המלון שבוצעו באמצעות האתר. עבור כל לקוח שומרים: כתובת הדואר האלקטרוני של הלקוח (שמשמשת לזיהוי הלקוח) ופרטים על כל ההזמנות של מלונות שהלקוח ביצע באמצעות האתר. עבור כל הזמנה שומרים: מספר הזמנה (שמשמש לזיהוי ההזמנה), כתובת הדואר האלקטרוני של הלקוח שביצע את ההזמנה, שם המלון שהוזמן, ומספר שמתאר את מחיר ההזמנה (דהינו המחיר שהלקוח ישלם/שילם למלון עבור ההזמנה).

**הערה:** האופן בו נשמרים הנתונים הנ"ל אינו מפורט, ויהיה עליך לציין אותו כחלק מפתרון השאלה.

הצע/הציעי מבנה נתונים עבור המערכת הנ"ל ששומר את הנתונים הנ"ל ותומך בפעולות הבאות:

- בהינתן פרטי הזמנה קיימת שכוללים: מספר הזמנה, שם המלון שהוזמן וכתובת הדואר האלקטרוני של הלקוח שביצע את ההזמנה, ביטול ההזמנה בזמן  $O(\log r)$  במוצע, כאשר  $r$  מציין את מספר ההזמנות שנמצאות במערכת המחשוב של האתר בזמן ביצוע הפעולה.
- בהינתן פרטי הזמנה חדשה שכוללים: מספר הזמנה, שם המלון שהוזמן, כתובת הדואר האלקטרוני של הלקוח שביצע את ההזמנה, תאריכי ההזמנה ומחיר ההזמנה, הוספת ההזמנה למערכת בזמן  $O(\log r)$  במוצע, כאשר  $r$  מציין את מספר ההזמנות שנמצאות במערכת המחשוב של האתר בזמן ביצוע הפעולה.
- בהינתן שם מלון, הדפסת סכום מחירי כל ההזמנות של המלון שנמצאות במערכת המחשוב של האתר, בזמן  $O(1)$  במוצע.
- בהינתן כתובת דואר אלקטרוני של לקוח, הדפסת רשימת כל ההזמנות של הלקוח שנמצאות במערכת המחשוב של האתר, בזמן  $O(p)$  במוצע, כאשר  $p$  מציין את מספר ההזמנות ברשימה שתודפס. (אין חשיבות לסדר ההזמנות ברשימה שתודפס).
- בהינתן מספר  $k$ , וכתובת דואר אלקטרוני של לקוח, הדפסת  $k$  ההזמנות שמחירן גבוה ביותר מבין ההזמנות של הלקוח שנמצאות במערכת המחשוב של האתר, בזמן  $O(k)$  במוצע.
- בהינתן מספר  $k$ , הדפסת  $k$  המלונות, שסכום מחירי כל ההזמנות שלהם הוא הגבוה ביותר, בזמן  $O(n+k \log k)$  **במקרה הגרוע ביותר** כאשר  $n$  מציין את מספר המלונות שנמצאים במערכת המחשוב של האתר בזמן ביצוע הפעולה.

בנוסף לתאור מבנה הנתונים שהצעת, תאר/י באופן מילולי איך מתבצעות **ארבעת** הפעולות האחרונות.

### 3. (15 נקודות)

נתונה נוסחת הנסיגה הבאה:

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{5}\right) + 3T\left(\frac{3n}{4}\right) + n^2$$

מצא/י את ה- $O$  הקטן ביותר שאתה/את יודע/ת להשיג עבור  $T(n)$ .  
נמק/י את תשובתך.

### 4. (15 נקודות)

הגדרה: גובה עץ מוגדר כמספר הצמתים במסלול הארוך ביותר מהשורש לאיזשהו עלה.  
לדוגמה, גובה העץ שבציור של שאלה 1 הוא 5.

הגדרה: נגדיר שזוג מספרים  $(n, k)$  הוא זוג טוב אם  $n$  ו- $k$  הם מספרים שלמים חיוביים

$$n = 2(2^k - 1) + k$$

ומתקיימת הנוסחה:

הוכח שלכל זוג מספרים טוב  $(n, k)$  קיים עץ בינארי בעל  $n$  צמתים שגובהו  $2k$

ומספר העלים בו הוא בדיוק  $2^k$

## 5. (15 נקודות)

### חלק א (8 נקודות)

שאלה זו מתייחסת להוצאה/הוספה של איברים בעץ AVL לפי האלגוריתמים שנלמדו בכיתה.

האם קיים עץ AVL T שמקים את שלושת התנאים הבאים:

- (1) מספר הצמתים בעץ (גם עלה נחשב צומת) הוא בדיוק 11.
- (2) לא קיימים שני צמתים בעץ כך שאם נוציא אותם מהעץ המקורי T אחד אחרי השני גובה העץ יקטן ב-1
- (3) לא קיים צומת כך שאם נוסיף אותו לעץ המקורי T גובה העץ יגדל ב-1.

אם תשובתך היא כן צייר עץ כזה.  
אם תשובתך היא לא, נמק מדוע לא קיים עץ כזה.

### חלק ב (7 נקודות)

שאלה זו מתייחסת להוספה של איברים לעץ B לפי החומר ללימוד עצמי שנמצא באתר הקורס.

יהי T עץ B (שבו  $t=2$ ) שמקיים את התנאים הבאים:

- (1) לשורש יש בדיוק 3 בנים.
- (2) מספר צמתי הדמה בעץ הוא בדיוק 11.
- (3) מספר העלים בעץ הוא בדיוק 14.

מהו המספר הקטן ביותר של איברים שיש להוסיף לעץ (אחד אחרי השני) כדי שגובה העץ יגדל ב-1. נמק את תשובתך על ידי ציור העץ T וציון הצמתים שצריך להוסיף לעץ כדי שגובהו יגדל ב-1.

**בהצלחה!**