

מבחן מועד א' סמסטר אביב תשע"ד
מבני נתונים

- משך המבחן: שלוש וחצי שעות.
- יש לענות על כל השאלות.
- מותר השימוש בחומר עזר כלשהו פרט למחשבים (מחשבוני מותר).
- יש להקפיד על כתיבה ברורה ומסודרת של התשובות.

בהצלחה !

1. (25 נקודות)

כתוב/כתבי פסאודו-קוד של פונקציה בשם $P1$, יעילה ככל האפשר, אשר מקבלת כפרמטר עץ בינארי T ומדפיסה עבור כל צומת x בעץ את המפתח של הצומת ולאחריו מספר שמציין את מספר הצמתים שנמצאים במסלול שמחבר בין צומת x לצומת בעל המפתח הגדול ביותר בתת העץ של T ששורשו x (תת העץ כולל גם את x).

אין חשיבות לסדר ההדפסה של הצמתים בפלט.

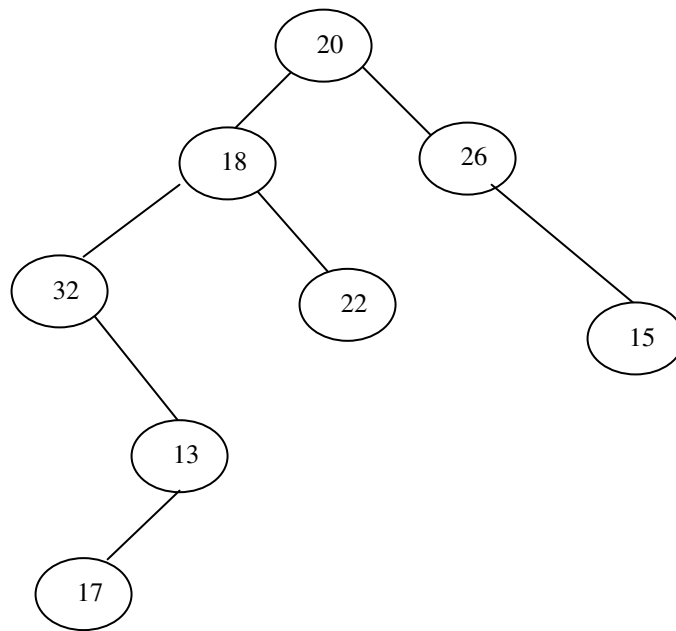
נתח/י את סיבוכיות זמן הריצה של הפונקציה שכתבת כתלות במספר הצמתים בעץ n .

הנחות ודרישות:

- אין להשתמש במבני עזר נוספים.
- מותר להשתמש במספר קבוע של משתנים (כמו למשל x, y, z).
- מותר להשתמש בפונקציות עזר, אך יש לכתוב את הפסיאודו-קוד של פונקציות העזר.
- כל צומת x בעץ מכיל את השדות הרגילים של עץ בינארי כפי שהוגדר בכיתה.

דוגמה:

יהי T עץ בינארי שמתואר בציור הבא :



לאחר הקריאה לפונקציה $P1(T)$ יתקבל הפלט:

20 3 18 2 26 1 32 1 22 1 15 1 13 2 17 1

הסבר לפלט: עבור צומת 20 הודפס המספר 3 כי המסלול בין 20 ל- 32 מכיל 3 צמתים. עבור צומת 26 הודפס המספר 1 כי המסלול בין 26 לעצמו מכיל צומת אחת. וכן הלאה.

2. (30 נקודות) נקודות

במערכת המחשוב של משרד הביטחון שומרים נתונים על ידי הרקטות לעבר ישראל בזמן מבצע צוק איתן. בשאלה זאת המונח יירוט משמעותו: יירוט מוצלח של רקטה על ידי סוללת כיפת ברזל.

עבור כל רקטה שומרים: מספר רקטה (משמש לזיהוי הרקטה), סוג הרקטה, הישוב שלעברו נורתה הרקטה, והאם הרקטה יורטה על ידי סוללת כיפת ברזל או לא. במידה והרקטה יורטה על ידי סוללת כיפת ברזל שומרים את פרטי הסוללה שירטה את הרקטה.

עבור כל סוללת כיפת ברזל שומרים את מספר הסוללה (משמש לזיהוי הסוללה), פרטים על הישובים שנמצאים בתחום שליטתה של הסוללה ופרטים על הרקטות שיורטו על ידי הסוללה.

עבור כל ישוב שומרים את שם הישוב (משמש לזיהוי הישוב), מספר הסוללה ששולטת על הישוב ופרטים על הרקטות שנורו לעבר הישוב.

הניחו שכל ישוב נשלט על ידי סוללת כיפת ברזל אחת בלבד.

הערה: האופן בו נשמרים הנתונים הנ"ל אינו מפורט, ויהיה עליך לציין אותו כחלק מפתרון השאלה.

הצע/הציעי מבנה נתונים עבור המערכת הנ"ל ששומר את הנתונים הנ"ל ותומך בפעולות הבאות:

- בהינתן נתוני רקטה שעדין לא עודכנו במערכת שכוללים: מספר הרקטה, סוג הרקטה, שם הישוב שלעברו נורתה הרקטה, והאם הרקטה יורטה או לא, הוספת נתוני הרקטה למערכת בזמן $O(\log x + \log z)$ בממוצע כאשר x מציין את מספר הרקטות שנורו על הישוב ו- z מציין את מספר הישובים שבשליטת הסוללה (לפי הנתונים שבמערכת המחשוב) בזמן ביצוע הפעולה.
- בהינתן מספר רקטה שנתוניה קיימים במערכת, הוצאת נתוני הרקטה מהמערכת בזמן $O(\log x + \log z)$ בממוצע כאשר x מציין את מספר הרקטות שנורו על הישוב שאליו נורתה הרקטה ו- z מציין את מספר הישובים שבשליטת הסוללה (לפי הנתונים שבמערכת המחשוב) בזמן ביצוע הפעולה.
- בהינתן מספר סוללת כיפת ברזל הדפסת שמות כל הישובים שבשליטתה של הסוללה ומספר היירוטים שבוצעו בכל ישוב על ידי הסוללה ממוינים לפי מספר היירוטים שבוצעו על ידי הסוללה בסדר עולה, בזמן $O(y)$ בממוצע, כאשר y מציין את מספר הישובים ברשימה שתודפס.
- בהינתן שם ישוב הדפסת סוגי הרקטות שנורו לישוב (כולל אלה שיורטו) ממוינים לפי מספר הרקטות שנורו לישוב מכל סוג בסדר עולה, בזמן $O(s)$ בממוצע, כאשר s מציין את מספר הסוגים של רקטות ברשימה שתודפס.
- בהינתן שם ישוב וסוג רקטה הדפסת כל הרקטות מסוג זה ששוגרו לישוב (כאשר עבור כל רקטה מודפס מספר הרקטה), בסדר כלשהו, בזמן $O(r)$ בממוצע כאשר r מציין מספר הרקטות שיודפסו.
- בהינתן מספר k , הדפסת k הסוללות של כיפת ברזל שאחוזי היירוטים שלהם הם הגבוהים ביותר בזמן $O(n + k \log k)$ במקרה הגרוע ביותר כאשר n מציין את מספר הסוללות של כיפת ברזל שנמצאות במערכת המחשוב של האתר בזמן ביצוע הפעולה.

בנוסף לתאור מבנה הנתונים שהצעת, תאר/י באופן מילולי איך מתבצעת הפעולה הראשונה ושלושת הפעולות האחרונות.

3. (15 נקודות)

להלן פטיאודו קוד של פונקציה בשם $P3(n)$ שמקבלת כפרמטר מספר n .
הפונקציה קוראת לפונקצית עזר בשם $F(m)$ שמקבלת כפרמטר מספר m ומתוארת
בהמשך. נתח/י את סיבוכיות זמן הריצה של הפונקציה $P3(n)$ כתלות ב- n (במונחים של ה-
 O הקטן ביותר שאתה/את יודע/ת להשיג).

$P3(n)$

```
x=0
for (i = 1; i ≤ n; i++) {
    for (j = 1; j ≤ i; j++) {
        x=x+F(i)
    }
}
return x
```

$F(m)$

```
s=0
for (i = 1; i ≤ 2m; i=i*2)
{
    s++
}
return s
```

4. (15 נקודות)

הגדרה: גובה עץ T מוגדר כמספר הצמתים במסלול הארוך ביותר מהשורש לאיזשהו עלה. גובה של צומת x בעץ T מוגדר כגובה תת העץ של T ששורשו x (תת העץ כולל את x). לדוגמה, גובה העץ שבציור של שאלה 1 הוא 5, וגובה צומת 18 בעץ הוא 4.

הוכח שלכל מספר שלם חיובי n שמתחלק ב-3 (ללא שארית) וגדול מ-8 קיים עץ בינארי שמקיים את כל שלושת התנאים הבאים:

(1) מספר הצמתים בעץ הוא בדיוק n .

(2) מספר הצמתים בעץ שגובהם גדול או שווה ל- $n/3 + \log_2(n/3)$ הוא לפחות $n/3$.

(3) מספר הצמתים בעץ שגובהם קטן או שווה ל- $2\log_2(n/3)$ הוא לפחות $n/3$.

(4) מספר העלים בעץ הוא לפחות: $\frac{n-3}{6}$

5. (15 נקודות)

חלק א (8 נקודות)

שאלה זו מתייחסת להוצאה/הוספה של איברים בעץ AVL לפי האלגוריתמים שנלמדו בכיתה.

האם קיים עץ AVL T שמקיים את כל 5 התנאים הבאים:

- (1) גובה העץ הוא בדיוק 4.
- (2) לא ניתן להגדיל את גובה העץ ב-1 על ידי הוספת 2 צמתים לעץ.
- (3) כאשר מוסיפים צומת גדול ביותר מכל האיברים בעץ לא מתבצע גלגול.
- (4) כאשר מוסיפים שני צמתים שגדולים יותר מכל שאר האיברים בעץ מתבצע גלגול סביב שורש העץ במהלך הוספת הצומת השני.
- (5) קיימים שלושה צמתים כך שכאשר מוסיפים אותם לעץ גובה העץ גדל ב-1.

אם תשובתך היא כן צייר עץ כזה.
אם תשובתך היא לא, נמק מדוע לא קיים עץ כזה.

חלק ב (7 נקודות)

שאלה זו מתייחסת להוספה של איברים לעץ B לפי החומר ללימוד עצמי שנמצא באתר הקורס.

יהי T עץ B (שבו $t=3$) שמקיים את כל 3 התנאים הבאים:

- (1) גובה העץ הוא בדיוק 4.
- (2) לשורש העץ יש שני בנים בדיוק.
- (3) לכל הצמתים בעץ שאינם עלים פרט לשורש, יש 4 בנים בדיוק.

מהו המספר הקטן ביותר של איברים שיש להוציא מהעץ (אחד אחרי השני) כדי שגובה העץ יקטן ב-1. נמק את תשובתך על ידי ציור העץ T וציון הצמתים שצריך להוציא מהעץ כדי שגובהו יקטן ב-1.

בהצלחה!