ביה״ס למדעי המחשב ומתמטיקה המכללה האקדמית נתניה
27.7.2015

מבחן מועד א' סמסטר אביב תשע"ה

מבני נתונים

- משך המבחן: שלוש וחצי שעות.
- יש לענות על כל השאלות.
- מותר השימוש בחומר עזר כלשהו פרט למחשבים (מחשבונים מותר).
- יש להקפיד על כתיבה ברורה ומסודרת של התשובות.

בהצלחה !

1. (25 נקודות)

נזכיר שעבור עץ **T** וצומת **x** בעץ, תת העץ של **T** ששורשו **x** מסומן ב- $\mathbf{T_x}$ (תת העץ הזה כולל גם את **x**).

הגדרה: נגדיר שצומת **x** בעץ בינארי **T** הוא צומת **טוב**, אם סכום המפתחות של כל העלים בתת העץ ששורשו x (דהינו בתת העץ $\mathbf{T_x}$) גדול מסכום המפתחות של כל הצמתים שנמצאים במסלול שמחבר את **x** לשורש העץ **T** (המסלול כולל גם את **x** וגם את שורש העץ **T**).

לדוגמה, בעץ שבציור שבעמוד הבא, הצומת **26** הוא צומת טוב כי סכום העלים בתת העץ $\mathbf{T_{26}}$ שווה ל- **30+19=49** והוא גדול מסכום הצמתים במסלול שמחבר את **26** לשורש העץ שווה ל- **26+20=46** .

כתוב/כתבי פסאודו-קוד של פונקציה בשם P1, **יעילה ככל האפשר**, אשר מקבלת כפרמטר עץ בינארי **T** ומדפיסה עבור כל צומת טוב בעץ **x** את המפתח של הצומת **x** ולאחריו מספר שווה למספר הצמתים שנמצאים במסלול הארוך ביותר שמחבר בין הצומת x לאיזשהו צומת טוב שנמצא בתת העץ ששורשו **x (דהינו בתת העץ $\mathbf{T_x}$)**.

אין חשיבות לסדר ההדפסה של הצמתים בפלט.

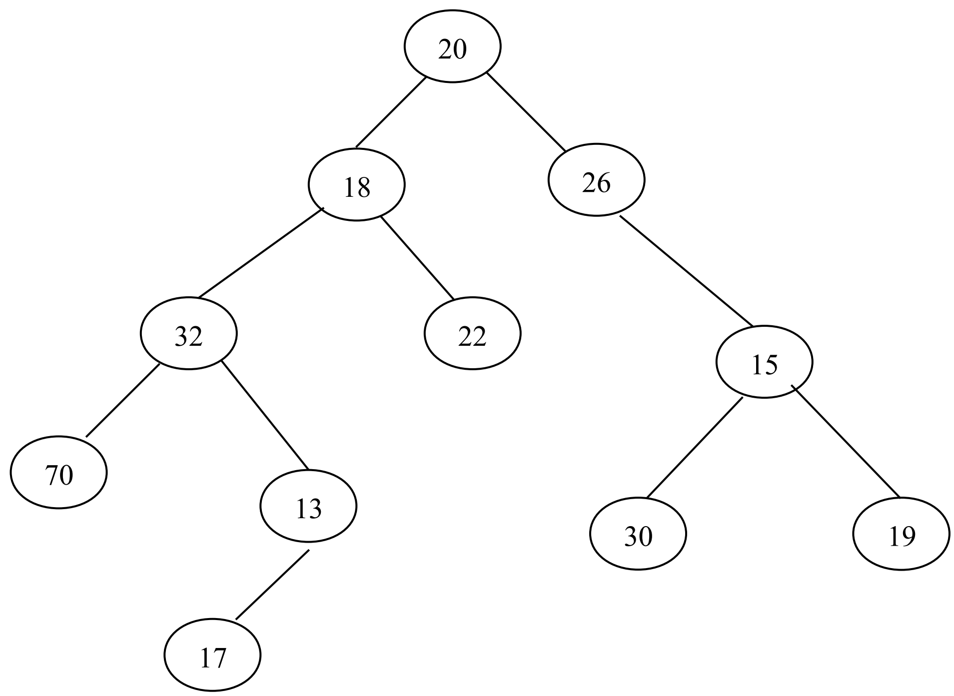
נתח/י את סיבוכיות זמן הריצה של הפונקציה שכתבת כתלות במספר הצמתים בעץ **n**.

הנחות ודרישות:

- אין להשתמש במבני עזר נוספים.
- מותר להשתמש במספר קבוע של משתנים (כמו למשל x,y,z).
- מותר להשתמש בפונקציות עזר, אך יש לכתוב את הפסיאודו-קוד של פונקציות העזר.
- כל צומת x בעץ מכיל את השדות הרגילים של עץ בינארי כפי שהוגדר בכיתה.

<u>דוגמה:</u>

יהי **T** עץ בינארי שמתואר בציור הבא :



לאחר הקריאה לפונקציה P1(T) יתקבל הפלט:

26 1 20 3 18 2 32 1

הסבר לפלט: הצמתים הטובים בעץ הם צמתים 26,20,18,32.
לדוגמה, צומת 26 הוא צומת טוב כי סכום העלים בתת העץ $\mathbf{T_{26}}$ שווה ל- **30+19=49** והוא גדול מסכום הצמתים במסלול שמחבר את 26 לשורש העץ ששווה ל- **26+20=46** . מאחר ובתת העץ $\mathbf{T_{26}}$ אין צומת טוב נוסף, מספר הצמתים במסלול הארוך ביותר המחבר בין 26 לצומת טוב בתת העץ $\mathbf{T_{26}}$ שווה ל-1.

באופן דומה, צומת 18 הוא צומת טוב, ובתת העץ $\mathbf{T_{18}}$ הצמתים הטובים הם 18,32. לכן המסלול הארוך ביותר המחבר בין צומת 18 לצומת טוב בתת העץ $\mathbf{T_{18}}$ מכיל את הצמתים 18 ו- 32 ומספר הצמתים במסלול הזה הוא 2.

2. (30 נקודות)

בעקבות גלי החום שהיו בשנים האחרונות באירופה, הוחלט במשרד התירות הצרפתי, להקים מערכת מחשוב ששומרת נתונים לגבי לינות של תירים במקומות הארוח השונים בצרפת כפי שמתואר בהמשך.

לכל מקום אירוח שומרים: שם מקום הארוח (משמש לזיהוי מקום הארוח), כתובתו, האם בחדרי הארוח שבמקום יש מזגנים או לא, וכן נתונים על לינות של תירים במקום הארוח.

הנח/הניחי שעבור כל מקום ארוח, או שבכל חדרי הארוח שבמקום יש מזגנים או שבכל חדרי הארוח במקום אין מזגנים. (במילים אחרות, אין מקום ארוח שבו בחלק מהחדרים יש מזגנים ובחלק מהחדרים אין מזגנים).

לכל עיר/עירה שומרים: שם העיר/עירה (משמש לזיהוי העיר/עירה), שם האיזור בצרפת אליו שיכת העיר, וכן נתונים על הלינות של התירים במקומות האירוח בעיר.

הנח/הניחי שמספר האיזורים בצרפת הוא **<u>קבוע</u>** ועומד על 22.

להשכלה כללית: האיזורים בצרפת נקראים חבלים, למשל חבל אלזס, חבל לורן, חבל פרובנס, וכו'...

הצע/הציעי מבנה נתונים עבור המערכת הנ"ל ששומר את הנתונים הנ"ל ותומך בפעולות הבאות:

- הוספת/הוצאת הנתון שתיר מסוים לן במקום ארוח מסוים בתאריך מסוים בזמן O(logx+logz) בממוצע כאשר x מציין את מספר הערים/עירות בצרפת ו- z מתאר את מספר מקומות הארוח בצרפת.
- בהינתן חודש שנה ואיזור הדפסת סך כל הלינות שהיו בשנה זו בחודש זה באיזור זה, במקומות ארוח ללא מזגן, בזמן O(1) בממוצע.
- בהינתן שם איזור, הדפסת כל הערים/עירות באיזור זה שלנו בהן תירים במקומות ארוח עם מזגן, ממוינות לפי המספר הכולל של לינות במקומות ארוח עם מזגן, בזמן O(c) במקרה הגרוע, כאשר c מציין את מספר הערים/עירות ברשימה שתודפס. (שימו לב שעיר/עירה שלא היו בה לינות במקומות ארוח עם מזגן לא תופיע ברשימה).
- בהינתן עיר/עירה חודש ושנה הדפסת כל מקומות האירוח בעיר/עירה שאין בהם מזגנים ולנו בהם תירים בשנה זו בחודש זה, ממוינים לפי מספר הלינות שהיו במקומות אלה בשנה זו בחודש זה, בזמן O(h) בממוצע, כאשר h מציין את מספר מקומות הארוח ברשימה שתודפס.
- בהינתן מספר k, הדפסת k הערים/עירות שמספר הלינות הכולל בהן במקומות אירוח בלי מזגן הוא הגדול ביותר בזמן O(k) במקרה הגרוע.

בנוסף לתאור מבנה הנתונים שהצעת, תאר/י באופן מילולי איך מתבצעות שלושת הפעולות האחרונות.

3. (15 נקודות)

להלן פסיאודו קוד של פונקציה בשם P3(n) שמקבלת כפרמטר מספר n.
הפונקציה קוראת לפונקצית עזר בשם F(m) שמקבלת כפרמטר מספר m ומתוארת בהמשך.

נתח/י את סיבוכיות זמן הריצה של הפונקציה P3(n) כתלות ב- n (במונחים של ה- O הקטן ביותר שאתה/את יודע/ת להשיג).

```
P3(n)
-------
x=0
for (i = 1; i ≤ n^2 ; i++) {
  j=1
  while  j≤n^2  {

      x=x+i·F(j)

      j=j·2
  }
}

return x


F(m)
-------
if (m≤1) {return 1}
s=0
for (i = 1; i ≤ m; i++)
   {
     s=s+i
   }
return   s+F(m/2)+F(m/3)
```

4. (15 נקודות)

הגדרה: גובה עץ T מוגדר כמספר הצמתים במסלול הארוך ביותר מהשורש לאיזשהו עלה. גובה של צומת x בעץ T מוגדר כגובה תת העץ של T ששורשו x (תת העץ כולל את x). לדוגמה, גובה העץ שבציור של שאלה 1 הוא 5, וגובה צומת 18 בעץ הוא 4.

הוכח שלכל מספר שלם חיובי n שמתחלק ב- 4 (ללא שארית) וגדול מ- 32 קיים עץ בינארי שמקיים את כל ארבעת התנאים הבאים:

1) מספר הצמתים בעץ הוא בדיוק n.

2) יש בעץ לפחות $\frac{n}{16}$ צמתים שהרמה שלהם גדולה מ- $\log_2(\frac{n}{4})-2$ וקטנה מ- $\log_2(\frac{n}{4})+1$.

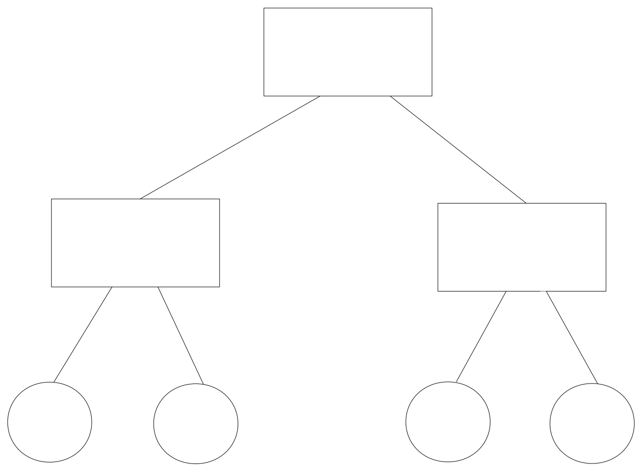
3) יש בעץ לפחות $\frac{n}{16}$ צמתים שהרמה שלהם גדולה מ- $\frac{n}{4}+2\cdot\log_2(\frac{n}{4})-3$ וקטנה מ- $\frac{n}{4}+2\cdot\log_2(\frac{n}{4})+3$

4) יש בעץ לפחות $\frac{n}{4}$ צמתים שהגובה שלהם גדול מ- $\frac{n}{4}+2\cdot\log_2(\frac{n}{4})-4$.

5) יש בעץ לפחות $\frac{n}{8}$ עלים.

5. (15 נקודות)

שאלה זו מתייחסת להוספה של איברים לעץ **B** לפי אלגוריתם ההוספה שנלמד בכיתה.
יהי **T** עץ **B** שבו **t=2** שמתואר בציור הבא (גובה העץ 3):



מהו המספר הקטן ביותר של איברים שיש להוסיף לעץ (אחד אחרי השני) כדי לקבל עץ שגובהו 4 ומספר הבנים של השורש שלו הוא 3.

נמק את תשובתך על ידי ציור העץ **T** וציון הצמתים שצריך להוסיף לעץ כדי לקבל עץ שגובהו 4 ומספר הבנים של השורש שלו הוא 3.

בהצלחה!